

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B, να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad .$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X, αν $\bar{x} > 0$, και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A, τότε η συνάρτηση $f - g$

έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το A.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X, ισχύει ότι $0 \leq f_i \leq 1$.

δ) Η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

ε) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται μόνο όταν τα A, B πραγματοποιούνται συγχρόνως.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x'x στο σημείο A(-2, 0).

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
Μονάδες 7

B3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παραστάσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανοημένες.

Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
 - Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
 - Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36° .
- $$\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18}$$
- , όπου N_1, N_2, N_3 και N_4 είναι οι αθροιστικές συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα **I** συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Κλάσεις (σε ώρες)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
Σύνολο		

Πίνακας **I**

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

Για τα ερωτήματα Γ3 και Γ4, δίνεται ότι $f_1\%=20$, $f_2\%=25$, $f_3\%=30$, $f_4\%=15$ και $f_5\%=10$.

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

Μονάδες 5

Γ4. Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

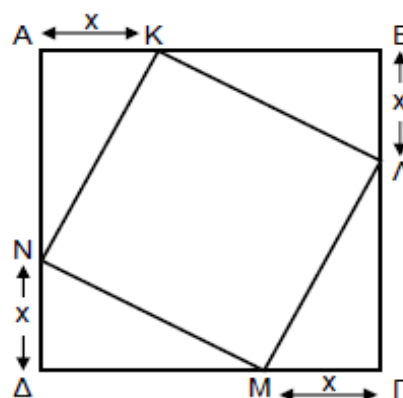
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AK=BL=GM=DN=x$ όπως φαίνεται στο Σχήμα Ι.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως συνάρτηση του x , είναι:

$$E(x)=2(x^2-4x+8), x \in (0, 4)$$



Σχήμα Ι

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 4

Δ3. Θεωρούμε τις τιμές $y_i=E(x_i)$, $x_i \in (0, 4)$, $i=1, 2, 3, \dots, 19$, έτσι ώστε:

- Τα x_i , $i=1, 2, 3, \dots, 19$ είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.
- Η μέση τιμή των x_i , $i=1, 2, 3, \dots, 19$ και η διάμεσός τους είναι ίσες με 2.
- Η μέση τιμή των y_i , $i=1, 2, 3, \dots, 19$ είναι ίση με 8,02.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των $\bar{x}^2$, $i=1, 2, 3, \dots, 19$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση S_x των x_i , $i=1, 2, 3, \dots, 19$ και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές.

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v}$$

Δίνεται ότι t_i , $i=1, 2, \dots, v$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

(Μονάδες 5)

γ) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις τιμές x_i , $i=1, 2, 3, \dots, 19$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A = \{x_i, i=1, 2, 3, \dots, 19, \text{έτσι ώστε } x_i^2 \geq 4\}$.

$B = \{x_i, i=1, 2, 3, \dots, 19, \text{έτσι ώστε } E(x_i) \leq 8\}$ και

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα A και B».

(Μονάδες 6)

Μονάδες 17

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A4. α) Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$.

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -4\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 12\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

B2. $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

Το πρόσημο και οι ρίζες της $f'(x)$ φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	ο	- ο	+
$f(x)$		τ.μ.	τελ.	

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

Στο $x = -2$ η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $f(-2) = 0$

Στο $x = 0$ η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $f(0) = -4$.

B3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x$ και $f''(x) = 6x + 6$.

Το πρόσημο και οι ρίζες της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	ελ.		

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος στο σημείο $M(-1, f(-1))$

B4.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{5})}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{5})}{x-2} =$$

$$= \frac{-6 \cdot 2\sqrt{5}}{-4} = 3\sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

ΚΛΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΩΡΕΣ)	ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ x_i
$[0, c)$	
$[c, 2c)$	
$[2c, 3c)$	
$[3c, 4c)$	
$[4c, 5c)$	18

$$\frac{4c + 5c}{2} = 18 \Leftrightarrow 9c = 36 \Leftrightarrow c = 4$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

Οπότε

	x_i
[0, 4)	2
[4, 8)	6
[8, 12)	10
[12, 16)	14
[16, 20)	18

$$\alpha_5 = f_5 \cdot 360 \quad \text{άρρα} \quad f_5 = \frac{36}{360} = 0,10 \quad \text{οπότε } f_5\% = 10$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v} + \frac{v_4}{v} + 0,1 = 1 \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{v} = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{N_4}{18} = \frac{0,8v}{18} \Leftrightarrow \frac{N_4}{18} = \frac{v}{20}$$

$$N_4 = 0,8v \quad \text{άρρα} \quad \frac{N_4}{18} = \frac{N_1}{4} \quad \frac{v_1}{4} = \frac{v}{20} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{4}{20} \Leftrightarrow f_1 = 0,2$$

$$\text{Ομως} \quad \frac{N_4}{18} = \frac{N_2}{9} \Leftrightarrow \frac{v}{20} = \frac{v_1 + v_2}{9} \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2}{v} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \quad \text{ή } f_1\% = 20$$

$$\text{Ομοια} \quad \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} = 0,45 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,45 \Leftrightarrow 0,2 + f_2 = 0,45 \Leftrightarrow$$

$$f_2 = 0,25 \quad \text{ή } f_2\% = 25.$$

$$\frac{N_4}{18} = \frac{N_3}{15} \Leftrightarrow \frac{v}{20} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{15} \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v} = \frac{15}{20} \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v} = 0,75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,75 \Leftrightarrow$$

$$0,45 + f_3 = 0,75 \Leftrightarrow f_3 = 0,30 \quad \text{ή } f_3\% = 30.$$

$$\text{Οπότε } f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 - f_5 = 0,15 \quad \text{ή } f_4\% = 15.$$

Γ2.

Κλάσεις (σε ώρες)	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$
[0, 4)	2	20
[4, 8)	6	25
[8, 12)	10	30
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
Σύνολο		100

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

$\frac{1}{4}20\% + 25\% + \frac{1}{2}30\% = 45\%$
Γ3. Το ποσοστό είναι: .

Γ4. Οι νέες κλάσεις είναι τώρα:

Κλάσεις	x_i	f'_i	$x_i f'_i$
$[0, 4)$	2	$5/16$	$10/16$
$[4, 8)$	6	$3/8$	$18/8$
$[8, 12)$	10	$3/16$	$30/16$
$[12, 16)$	14	$1/8$	$17/8$
			6,5

$$f'_1 = \frac{v_2}{v_2 + v_3 + v_4 + v_5} = \frac{0,25v}{0,80v} = \frac{5}{16}$$

Αφού τώρα το μέγεθος είναι $v' = v_2 + v_3 + v_4 + v_5$.

$$\text{Όμοια } f'_2 = \frac{3}{8}, f'_3 = \frac{3}{16}, f'_4 = \frac{1}{8}$$

$$\text{Οπότε } \bar{x}' = \sum x_i f'_i = 6,5 \text{ ώρες.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο όπως προκύπτει από την ισότητα των
 ορθογωνίων τριγώνων $\triangle AKN, \triangle BKL, \triangle M\Gamma, \triangle NAM$.

$$\Delta 1. (ΚΛΜΝ) = (ΑΒΓΔ) - 4(ΑΚΜ) =$$

$$= 16 - 4 \left(\frac{1}{2} x(4-x) \right) =$$

$$16 - 8x + 2x^2 = 2(x^2 - 4x + 8), x \in (0, 4)$$

Δ2.

$$E(x) = 2x^2 - 8x + 16, x \in (0, 4)$$

$$E'(x) = 4x - 8$$

Το πρόσημο και οι ρίζες της E' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	2	4
$E'(x)$	-	0	+
$E(x)$		ελ.	

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x=2$ και $E(2) = 8 - 16 + 16 = 8$.

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

Δ3. α)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{19}}{19} = \frac{2(x_1^2 - 4x_1 + 8) + 2(x_2^2 - 4x_2 + 8) + \dots + 2(x_{19}^2 - 4x_{19} + 8)}{19}$$

$$\bar{y} = \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_{19}^2}{19} - \frac{8(x_1 + x_2 + \dots + x_{19})}{19} + \frac{16 \cdot 19}{19} =$$

$$8,02 = \frac{2x_1^2}{19} - 8\bar{x} + 16$$

$$8,02 = \frac{2x_1^2}{19} - 8 \cdot 2 + 16$$

$$x_1^2 = 401$$

$$\beta) \quad s^2 = \frac{1}{19} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{2x_1^2}{19} - \bar{x}^2$$

$$= 4,01 - 4$$

$$= 0,01 \text{ οπότε } s = \sqrt{0,01} = 0,1$$

$$cv_x = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 < 0,1$$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Υπάρχουν 19 παρατηρήσεις με $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{19}$.

Διάμεσος είναι η 10 παρατήρηση x_{10} .

Για το σύνολο A έχουμε

$$x_i^2 \geq 4 \Leftrightarrow x_i^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow x_i \geq 2 \Leftrightarrow x_i \geq \delta \quad \text{όπου } \delta \text{ η διάμεσος. Άρα } x_{10}, x_{11}, x_{12},$$

$x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{19}$$

Οπότε

Για το σύνολο B έχουμε

$$E(x_i) \leq 8 \Leftrightarrow$$

$E(x_i) \leq E(2)$ ισχύει μόνο όταν $x_i = 2$ αφού η E στο $x = 2$ παρουσιάζει ελάχιστο.

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{19}$$

Άρα

$$\text{Για το σύνολο } \Gamma: P(\Gamma) = P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B)$$

$$\text{Επειδή } A \cup B = \{x_{10}, \dots, x_{19}\} \text{ τότε } P(A \cup B) = \frac{10}{19}$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015**

$$\frac{10}{19} = \frac{9}{19}$$

Άρα $P(\Gamma) = 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ «ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

**ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. – ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. –
ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.**