

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) &
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x)=\frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

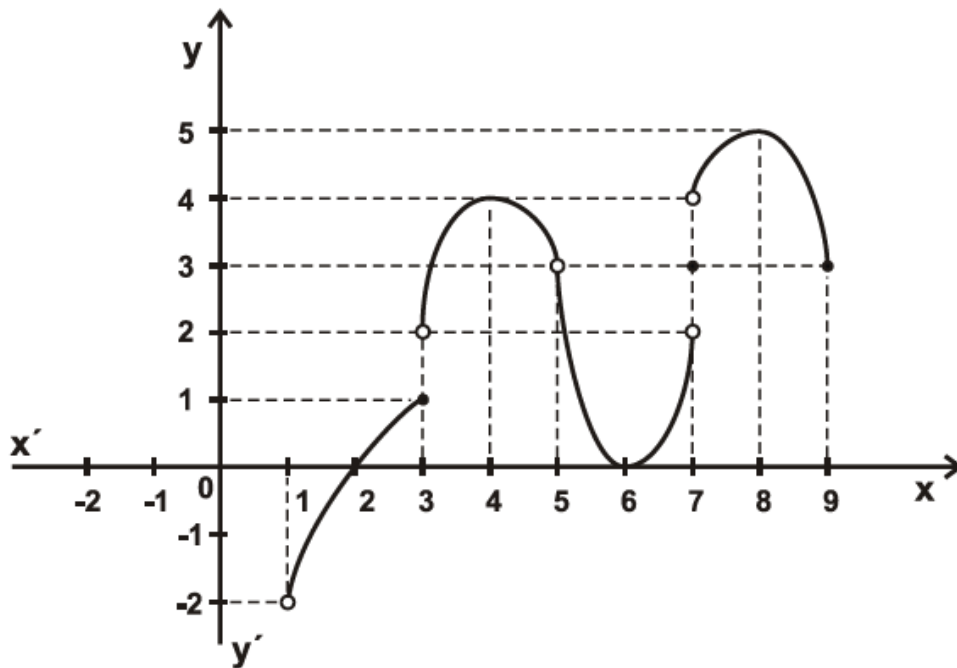
$$\text{αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 2

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$.

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

B5. Να βρείτε τα σημεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > f\left(x\right) - \frac{1}{6}x^3.$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$, $x \geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Μονάδες 8

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1.$$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 260-261.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 169.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.: 280.

A4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A=(1, 5) \cup (5, 9)$

$f(A)=(-2, 5]$.

B2. α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{δεν υπάρχει διότι } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \quad \text{και } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$

δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \text{δεν υπάρχει διότι } \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2 \quad \text{και } \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4$

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3$

B3. α) Για $x \rightarrow 2^-$ είναι $f(x) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Για $x \rightarrow 2^+$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Δεν υπάρχει
το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$.

β) Για $x \rightarrow 6$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

γ) Θέτουμε $f(x)=u$ για $x \rightarrow 8$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)=5$ οπότε $u \rightarrow 5$ άρα $\lim_{u \rightarrow 5} f(u)=3$

B4. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_1=3$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Η f δεν είναι συνεχής στο $x_2=7$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$.

B5. Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x_0=4$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. Οπότε $f'(4)=0$.

Η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $x_0=6$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. Οπότε $f'(6)=0$.

Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x_0=8$ και δέχεται οριζόντια εφαπτομένη τότε $f'(8)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)=3x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow x^3=y \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}$ για $y \geq 0$ ή

$$x=-\sqrt[3]{-y} \quad \text{για } x < 0.$$

Άρα
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

Γ2. Θεωρούμε την $h(x)=\ln x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(\mathbb{R})$ με $h'(x)=\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}x^2$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(\mathbb{R})$ με $h''(x)=-\frac{1}{x^2} + x = -\left(\frac{1}{x^2} - x\right)$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

Για $x > 0$, $\eta\mu x < x \Leftrightarrow \eta\mu x - x < 0$ οπότε $h''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η $h' \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Για $x > 0$ έχουμε $h'(x) > h'(0)$ ή

$$h'(x) > 0 \text{ άρα η } h \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } [0, +\infty)$$

Άρα για $x > 0$ έχουμε $h(x) > h(0)$ δηλ. $\eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$ ή $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

και αφού $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. $y(t) = x^3(t)$

$$y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε $y'(t_0) = x'(t_0)$

$$x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \quad (x'(t_0) > 0)$$

$$3x^2(t_0) = 1 \rightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{αφού } x(t_0) > 0.$$

Οπότε
$$y(t_0) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}^3}{3^3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Άρα στο σημείο $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Η g είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ είναι $g(-x) = g(x)$.

Έχουμε
$$\int_{-1}^1 x^3 g(x) dx = 0$$
.

Θέτουμε $x = -t$ οπότε $dx = -dt$

Για $x = -1$ είναι $t = 1$

$x = 1$ είναι $t = -1$ οπότε

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

$$I = \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx = \int_1^{-1} (-t)^3 g(-t) dt = - \int_{-1}^1 t^3 g(t) dt = -I$$

Άρα $2I=0 \Leftrightarrow I=0$

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$$

Οπότε

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Στο $x=1$

- $f(1)=1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} + 1 \stackrel{0}{=} 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x=1$ οπότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} + 1 \stackrel{-\infty}{=} -\infty$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \stackrel{-\infty}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$$

Άρα $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Δ2. Κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η f' .

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x} + 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$$

Για $0 < x < 1$ είναι

αφού για $x < 1$ είναι

$\ln x < 0$ οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{x(x-1)^2}$$

Για $x > 1$ είναι

Θεωρούμε $h(x) = x-1-\ln x$, $x \geq 1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = 1-1-\ln x = -\ln x < 0$ αφού για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$. Άρα η h είναι γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Οπότε για $x > 1$ είναι $h(x) < h(1)$ δηλ. $h(x) < 0$.

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Στο $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\ln x}{x} + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - x}{x}}{2(x - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

Οπότε το $x=1$ είναι το κρίσιμο σημείο της f .

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και

i. α) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1] = A_1$ οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο A_1

$$\text{άρα } f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1].$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

Το O περιέχεται στο $f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική (f') ρίζα στο A_1 .

i. β) $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty) = A_2$ οπότε η f είναι γν. φθίνουσα στο A_2

$$\text{άρα } f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right) = (0, 1] \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Το O δεν περιέχεται στο $f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο A_2 .

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μόνο μια ρίζα στο $A_1 = (0, 1)$.

$$\text{ii. } E(W) = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx \quad \text{αφού } 0 < x_0 < 1.$$

Για $x_0 < x < 1$ έχουμε (f')

$$f(x_0) < f(x) < f(1) \quad \text{ή} \quad 0 < f(x) < 1$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_0, 1]$ οπότε

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{x_0}^1 f(x) dx = \int_{x_0}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_{x_0}^1 \frac{\ln x}{x} dx + \int_{x_0}^1 \frac{1}{x(x-1)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^1 2 \ln x (\ln x)' dx + \int_{x_0}^1 1 dx = \frac{1}{2} \left[\ln^2 x \right]_{x_0}^1 + [x]_{x_0}^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln^2 1 - \ln^2 x_0) + (1 - x_0) = -\frac{1}{2} \ln^2 x_0 + 1 - x_0 = \\ &= \frac{-\ln^2 x_0 + 2 - 2x_0}{2} = \frac{-x_0^2 + 2 + 2x_0}{2} \quad \text{τ.μ.} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$$

Δ4. Για $x > 1$ έχουμε

$$xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Leftrightarrow$$

$$xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \Leftrightarrow$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016**

$$x[F(x)-F(1)] > F(x^2)-F(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x[F(x)-F(1)]}{x^2-x} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$$

Επειδή $1 < x < x_2$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στα $[1, x]$, $[x, x_2]$ όπου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη άρα υπάρχουν

$$x_1 \in (1, x): F'(x_1) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = f(x_1)$$

$$\text{και } x_2 \in (x, x^2): F'(x_2) = \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x} = f(x_2)$$

και επειδή $\xi_1 < \xi_2$ έχουμε $f(\xi_1) > f(\xi_2)$ ($f \downarrow$ στο $(1, +\infty)$)

$$\text{άρα } \frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x} \quad \text{οπότε ισχύει.}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr