

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής στην f ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α, β) .

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α, β) .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,$

$\beta]$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

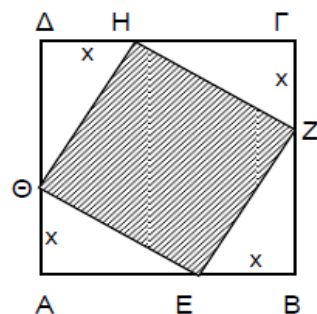
ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Μονάδες 10

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο $ABΓΔ$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm . Αν το τετράγωνο $EZHΘ$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $ABΓΔ$:



B1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZHΘ$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZHΘ$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

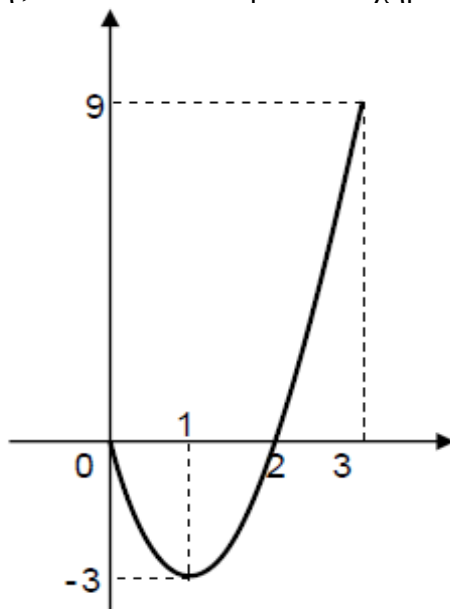
B4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZHΘ$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2, f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

• Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Γ3. Να υποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}.$$

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1.$$

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. α. Ψ

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν του x_0 .

A3. δ

A4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle BEZ$

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Rightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Rightarrow EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

B2. $(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

Άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$

B3. $f'(x) = 4x - 4, \quad 0 \leq x \leq 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	1	2
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			
	TM	TE	TM

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x=0$ ή $x=2$ με τιμή $f(0) = 4$, και ελάχιστο για $x=1$ με τιμή $f(1)=2$.

B4. Για $x_0 \in [0, 2]$ ισχύει:

$$x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5.$$

Όμως $2 \leq f(x_0) \leq 4$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του $EZH\Theta$ να 'ναι ίσο με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. άρα $f(0)=f(3)=2$.

$$\int_0^3 |f'(x)| dx = 8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

$$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8$$

$$\Leftrightarrow f(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)}{(\ln x)'} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x f'(x) = f' \text{ συνεχής}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x) - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)'}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{f'(x)} = -\infty$$

Γιατί $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Γ2.

x	0	2	3
f'(x)	○	- ○	4
f(x)			
	TM	TE	TM

Η f είναι στο $[0, 2]$, στο $[2, 3]$ και παρουσιάζει T.M. για $x=0$ και $x=3$, T.E. για $x=2$.

x	0	1	3
f'(x)			
f(x)			
		Σ.Κ	

Η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, κυρτή στο $[1, 3]$ και παρουσιάζει Σ.Κ. για $x=1$.

Γ3.

- Η f συνεχής στο $[2, 3]$ ως παραγωγίσιμη
- $f(2) \cdot f(3) < 0$. Από θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχισ.

$x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι στο $[2, 3]$ θα 'ναι μοναδικό
Αν $x \in (2, x_0)$, $f(x) < 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

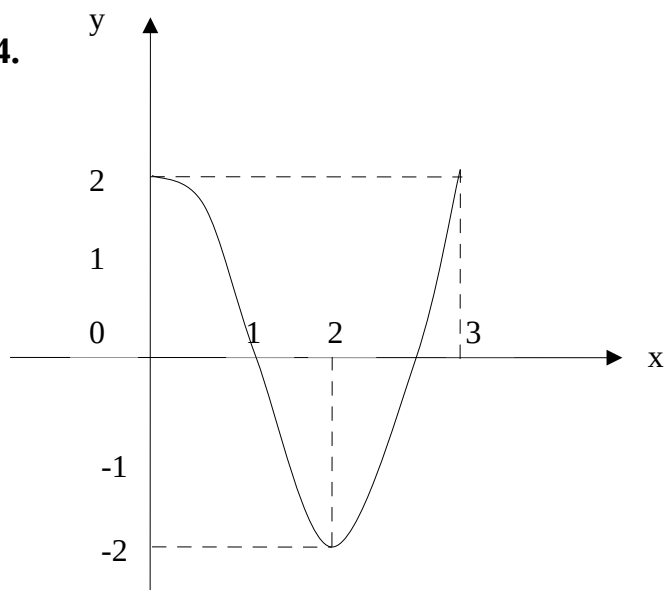
Αν $x \in (x_0, 3)$, $f(x) > 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)}$$

οπότε δεν ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Γ4.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως πολωνυμική

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ως πολωνυμική.

Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0, 2]$.

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha \right) = \alpha - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0)$$

Τότε $\alpha - 1 = 2 \Rightarrow \alpha = 3$.

Δ3. Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $f'(x) = \left(-\frac{\eta\mu x}{x} + 3\right)' = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

Θεωρούμε: $g(x) = \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

$g'(x) = (\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = \chi\eta\mu x > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και επειδή η g συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ θα
 'ναι $\nearrow$ σ' αυτό.

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Για $x \in (0, +\infty)$: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Αν $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Αν $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Οπότε:

x	$-\pi/2$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	- $\bigcirc$ +	
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	

Η f είναι $\searrow$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$, $\nearrow$ στο $[2, +\infty)$.

Δ4.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 &\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} + 3 \geq f(x) \geq 2 \end{aligned}$$

Τότε:

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(-\frac{2}{\pi} + 3\right) dx \Leftrightarrow \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5.

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Leftrightarrow 0 > -\frac{\pi}{2}x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}x < 0 \\ 0 < x < 1 &\Leftrightarrow 0 > -x > -1 \Leftrightarrow e^0 > e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow \\ 1 > e^{-x} &> \frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}e^{-x} < -\frac{\pi}{2e} \end{aligned}$$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017**

Άρα

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}e^{-x} < 0$$

Συνεπώς

$$-\frac{\pi}{2}x, -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Η f είναι  στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ άρα και "1-1".

Τότε:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) &= f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-x} - x = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε $h(x) = e^{-x} - x$, $x \in [0, 1]$

$h'(x) = -(e^{-x} + 1) < 0$ άρα η h είναι  στο $[0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$h(0) = 1 > 0$, $h(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Από θ. Bolzano η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ και επειδή η h είναι  η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr