

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΘΕΜΑ Α**

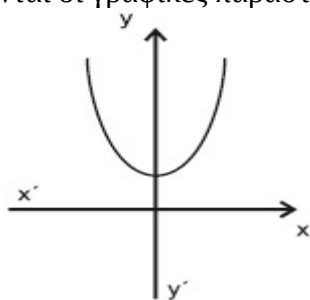
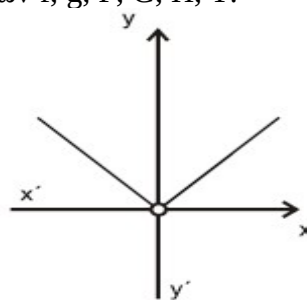
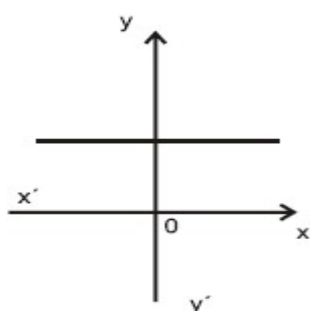
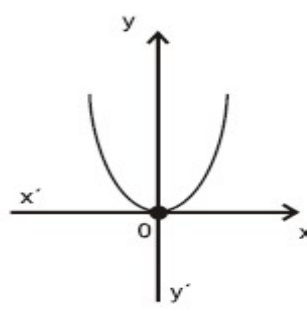
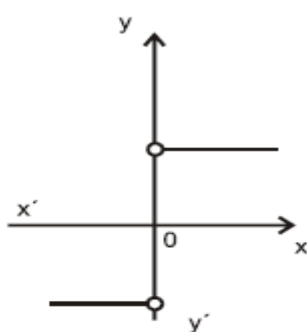
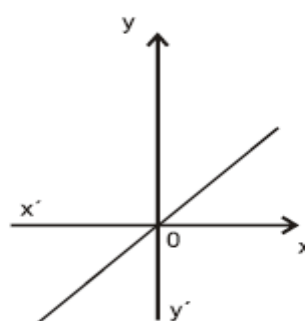
A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 4

A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .

**(f)****(g)****(F)****(G)****(H)****(T)**

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g .

Μονάδες 4

A4. Θεωρήσετε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - 2f(2x)) \cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) \ln \left(\frac{2^{e+1}}{e+1} \right)$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 145

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15

A3. $f' = T$ και $g' = H$

A4. α. Ψ

β. Αν $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 2$$

A5. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως ρητή. Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=1$, δηλαδή θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + a) = a + 1 \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x} = 2 \\ \blacksquare f(1) = 1^2 + a = a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Για $a=1$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ \frac{x+1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

B2. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x+1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$,

δηλαδή δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

B3. Αναζητούμε x_0 τέτοιο ώστε $f'(x) = -\frac{1}{4}$.

Για $x < 1$ έχουμε: $f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$.

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x_0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{8} \text{ (δεκτή αφού } -\frac{1}{8} < 1)$$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{64} + 1 = \frac{65}{64} \rightarrow A = \left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right)$$

$$(\varepsilon_1): y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{32} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}$$

Για $x > 1$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow B\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

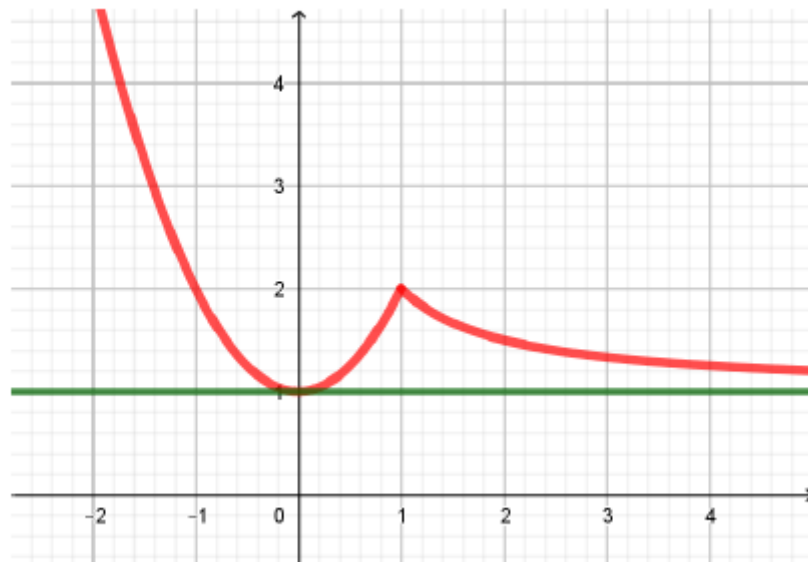
$$(\varepsilon_2): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

B4. $D_f = \mathbb{R}$

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}{x} = 1$, άρα η C_f έχει οριζόντια στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$.

Γραφική παράσταση της f



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (2\eta\mu x - x)' = 2\sigma\upsilon\nu x - 1, x \in [0, \pi]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

και επειδή $x \in [0, \pi]$ θα είναι $x = \frac{\pi}{3}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
x_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x_0)$	$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-1=\sqrt{2}-1>0$	$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=0-1<0$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$

$$f(0)=2\eta\mu 0-0=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$f(\pi)=2\eta\mu\pi-\pi=-\pi$$

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$ την τιμή $f(0)=0$

- Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x=\frac{\pi}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

- Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x=\pi$ την τιμή $f(\pi)=-\pi$.

Γ2. $f''(x)=(2\sigma\upsilon\nu x-1)'=-2\eta\mu x \leq 0$, για κάθε $x \in [0, \pi]$ και το $''=''$ ισχύει μόνο για $x=0$ ή $x=\pi$.

Επομένως η f είναι κοίλη στο $[0, \pi]$ και οποιαδήποτε εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής A, δηλαδή έχει μόνο κοινό σημείο με τη C_f .

$$\begin{aligned}
 \text{Γ3. } \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx &= \int_0^{\pi} (2\eta\mu x - x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} (2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x) \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx - \int_0^{\pi} x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \eta\mu 2x \, dx - \int_0^{\pi} x \cdot (\eta\mu x)' \, dx \\
 &= \left[-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right]_0^{\pi} \left[x \cdot \eta\mu x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x)' \cdot \eta\mu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \eta\mu x \, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} \\
 &= -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\Gamma 4. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \eta \mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta \mu x}{x} - 1 \right) = 2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x}{x} - 1$$

$$= 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f(2x) \cdot \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x} \right) \cdot x \ln x \right] = 0$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x} \right) = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ από } \Gamma 4. \alpha) \text{ και}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(2x)}{x} = 2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(2x)}{2x} \stackrel{\text{Θέτω } 2x=u}{=} \lim_{\text{όταν } x \rightarrow 0}{\text{τότε } u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x}{1} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

DLH

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση g, με $g(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x$, $x \geq 0$

$$g'(x) = [(x+1) \cdot \ln(x+1) - x]'$$

$$= (x+1)' \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot [\ln(x+1)]' - (x)'$$

$$= 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1)$$

Για $x > 0$ είναι $x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{Είναι } x > 0 \Rightarrow \underset{=}{g(x)} > g(0) \Leftrightarrow (x+1) \cdot \ln(x+1) - x > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1) \cdot \ln(x+1) > x \quad x+1 > 0 \quad \ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$$

Δ2.

$$f'(x) = \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right]' = \frac{[\ln(x+1)]' \cdot x - \ln(x+1) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$, διότι $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$ από Δ1.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ δηλαδή είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

DL' H

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1)}{x} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{Άρα } f(A) = D_{f^1} = (0, 1)$$

Δ3.

$$\begin{aligned} f(x) < 1 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x)) > f(1) &\Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \\ \ln(f(x)+1) > f(x) \cdot \ln 2 &\Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > \ln 2^{f(x)} \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \ln x \uparrow \\ f(x)+1 > 2^{f(x)} &\Leftrightarrow f(x) > 2^{f(x)} - 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με

$$h(x) = x \cdot (x-2) \cdot f(\alpha) + x \cdot (x-1) \cdot f^{-1}(a) + (x-1) \cdot (x-2) \cdot \eta\mu(\pi\alpha), \quad x \in \mathbb{R}$$

• Η h είναι συνεχής στα [0, 1] και [1, 2] ως πολυωνυμική

• $h(0) = 2 \cdot \eta\mu(\pi\alpha) > 0$, διότι $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \pi\alpha < \pi$ και $\eta\mu(\pi\alpha) > 0$

$h(1) = -f(\alpha) < 0$, διότι $f(\alpha) > 0$ από Δ2

$h(2) = 2f^{-1}(\alpha) > 0$, διότι $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} .

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano για τη συνάρτηση h στα διαστήματα [0, 1] και [1, 2], δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1) και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2).

Η h είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού άρα έχει δύο το πολύ ρίζες. Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μια στο διάστημα (0, 1) και μια στο διάστημα (1, 2).

Επειδή τα 0, 1 και 2 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης $h(x) = 0$, οι εξισώσεις

$$\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0 \quad \text{και} \quad h(x) = 0$$

είναι ισοδύναμες στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, δηλαδή η εξίσωση

$$\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, μια στο (0, 1) και μια στο (1, 2)

Δ5. Θα δείξουμε αρχικά $F(1) > \ln 2$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο [1, e], με $F'(x) = f(x)$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Υ. για την F στο διάστημα [1, e] άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [1, e]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1}$$

$$1 < \xi \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\xi) \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1} \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} e - 1 > 0$$

$$e \cdot \ln 2 - \ln 2 > e \cdot \ln 2 - F(1) \Leftrightarrow -\ln 2 > -F(1) \Leftrightarrow F(1) > \ln 2 \quad (1)$$

Έπειτα θα δείξουμε ότι

$$F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$$

Από το Θ.Μ.Τ. με την F στο [1, e]: υπάρχει $\xi \in (1, e)$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e-1}$$

$$\xi < e f \downarrow f(\xi) > f(e) \Leftrightarrow \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e-1} > \frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$F(1) < e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e} < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$e \ln 2 - \frac{e \cdot \ln(e+1) - \ln(e+1)}{e} < (e+1) \cdot \ln 2 - (e+1) \Leftrightarrow$$

$$e \ln 2 - \ln(e+1) + \frac{1}{e} \cdot \ln(e+1) < e \ln 2 + \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\ln(e+1) < e \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln 2^e \ln x \uparrow e+1 < 2^e$$

που ισχύει διότι $e+1 < 4 = 2^2 < 2^e$.

Επομένως

$$F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\ln 2 < F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$$