

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό, σελίδα 133

**A2.** Σχολικό, σελίδα 73

**A3.** Σχολικό, σελίδα 128

**A4.** α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για κάθε  $x > 1$ :

$$f'(x) = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)' = - \frac{(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0$$

Η  $f$  είναι γν. αύξουσα στο  $(1, +\infty)$  οπότε " $1-1$ " και αντιστρέφεται.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} 1-\sqrt{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} 1+\sqrt{x} \left( \frac{a}{0} \right)}{1-x} = \textcolor{red}{\text{ζ}}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \textcolor{red}{\text{ζ}} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = 0 \textcolor{red}{\text{ζ}}$$

$$A_{f^{-1}} = f((1, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

Για  $x > 1$ :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \Leftrightarrow x = \left( \frac{y-1}{y} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \left( \frac{y-1}{y} \right)^2$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right)^2, x < 0$$

**B2.**  $\text{Agof}^{-1} = \{x \in A \mid f^{-1}(x) \in A\} =$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ  
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021**

$$= \left\{ x \in (-\infty, 0) / \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \geq 0 \right\} = (-\infty, 0)$$

Για  $x < 0$ :

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{\left( \frac{x-1}{x} \right)^2} =$$

$$= \left| \frac{x-1}{x} \right| \quad x < 0$$

**B3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} x-1}{x} \left( \frac{a}{0} \right) = +\infty$$

Άρα  $x=0$  ΚΑΤ. ΑΣ. της  $C_h$ .

**ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ – ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x-1}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x-1}{x} = 1$$

Άρα  $y=1$  ΟΡ.ΑΣ. της  $C_h$  στο  $-\infty$ .

**B4. Θέτουμε  $u = -h(x)$**

Αν  $x \rightarrow 0^+$  τότε  $u \rightarrow -\infty$  (B3).

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-h(x)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Για κάθε  $x$  κοντά στο 0:

$$\left| e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |e^{-h(x)}| \iff -e^{-h(x)} \leq e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \leq e^{-h(x)}$$

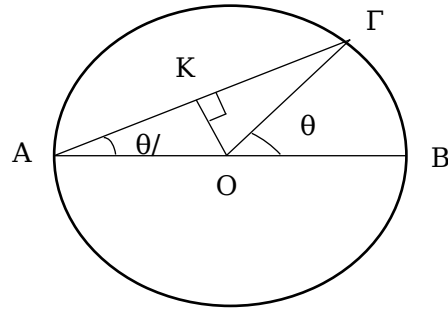
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-h(x)}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-h(x)} = 0$$

Από κ.π.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**



Φέρνουμε το ύψος OK του ισοσκελούς τριγώνου  $\overset{\Delta}{\underset{\textcolor{red}{\iota}}{AOG}}$  που είναι συγχρόνως και

διάμεσος του  $\overset{\Lambda}{\underset{\textcolor{red}{\iota}}{BAG}}$  ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την επίκεντρη  $\overset{\Lambda}{\underset{\textcolor{red}{\iota}}{BOG}}$

$$\sigma \nu \frac{\theta}{2} = \frac{AK}{AO} = \frac{AK}{1} = AK$$

$$AG = 2 AK = 2 \cdot \sigma \nu \frac{\theta}{2}$$

Επίσης  $\widehat{BG} = \theta$

Άρα

$$t(\theta) = \frac{AG}{V_1} + \frac{BG}{V_2} = \frac{AG}{2} + \frac{BG}{4} = \sigma \nu \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

**Γ2.** Η συνάρτηση  $t(\theta)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi]$  με  $t'(\theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \eta \mu \frac{\theta}{2}$

$$t'(\theta) = 0 \iff \eta \mu \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \iff \frac{\theta}{2} \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$\textcolor{red}{\iota}$

Ο πίνακας μεταβολών για την συνάρτηση  $t(\theta)$  είναι ο εξής:

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ  
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021**

| $\theta$     | 0 | $\frac{\pi}{3}$                                                                   | $\pi$                                                                               |
|--------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $t'(\theta)$ |   | +                                                                                 | -                                                                                   |
| $t$          |   |  |  |

Η συνάρτηση  $t(\theta)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $\theta=\pi/3$ .

Γ3. Η συνάρτηση  $t$  παρουσιάζει τ.ε για  $\theta=0$  με τιμή  $t(0)=1$  και τ.ε για  $\theta=\pi$  με τιμή  $t(\pi)=\pi/4$ . Όμως  $\pi/4 < 1$  άρα η  $t$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $\theta=\pi$ .

Τελικά ο χρόνος μετάβασης από το Α στο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός στην επιλογή ΙΙΙ.

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 - \alpha x} + \alpha x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha \right) = 1 + \alpha$$

- Αν  $1+\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$  το όριο ισούται με  $+\infty$ , άτοπο
- Αν  $1+\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha < -1$  το όριο ισούται με  $-\infty$ , άτοπο
- αν  $1+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

**Δ2.** Εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(x_0, f(x_0))$ :  $y - e^{x_0} = e^{x_0} (x - x_0)$  (I). Αφού διέρχεται από το  $M(-1, 0)$ :  $-e^{x_0} = e^{x_0} (-1 - x_0) \Leftrightarrow \dots x_0 = 0$ .

Για  $x_0 = 0$  η (I):  $y - e^0 = e^0 x \Leftrightarrow y = x + 1$ .

Έστω  $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

Άρα η  $C_g$  με την ευθεία  $y = x + 1$  έχουν ένα κοινό σημείο.

Επίσης:  $g'(x) = -2x - 1$ ,  $g'(-1) = 1 = \lambda_e$  οπότε η  $y = x + 1$  εφάπτεται της  $C_g$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ  
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021**

**Δ3.**  $f''(x)=e^x>0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  οπότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και επειδή η  $y=x+1$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  θα ισχύει  $f(x) \geq x+1$  (II). Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=0$ .

$g''(x)=-2<0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  οπότε η  $g$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$  και επειδή η  $y=x+1$  είναι εφαπτομένη της  $C_g$  θα ισχύει  $g(x) \leq x+1$ . Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=-1$ .

Επομένως  $f(x) \geq x+1 \geq g(x)$ . Τελικά  $f(x) > g(x)$ .

**Δ4.** Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = (x-\kappa-1)[f(x-1)-x] + (x-\kappa)[f(x)-g(x)].$$

• Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[\kappa, \kappa+1]$

•  $h(\kappa) = -[f(\kappa-1)-\kappa] < 0$  διότι:

Για  $x \neq 0$ : (II)  $f(x) > x+1$

Για  $x=\kappa-1$ :  $f(\kappa-1) > \kappa \Leftrightarrow f(\kappa-1)-\kappa > 0$   $\kappa \neq 1$ .

•  $h(\kappa+1) = f(h)-g(\kappa) > 0$  από Δ3

$$h(\kappa) \cdot h(\kappa+1) < 0$$

από Θ.Β η εξίσωση  $h(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa} + \frac{f(x)-g(x)}{x-\kappa-1} = 0$$

έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο  $(\kappa, \kappa+1)$ .

**ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ**

**Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ**

**«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

**[www.floropoulos.gr](http://www.floropoulos.gr)**