

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2021

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x < 0$.

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x < 0$.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος **B2**.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B2**.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο O και ακτίνα $R=1\text{km}$. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα $v_1=2\text{km/h}$ και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα $v_2=4\text{km/h}$.

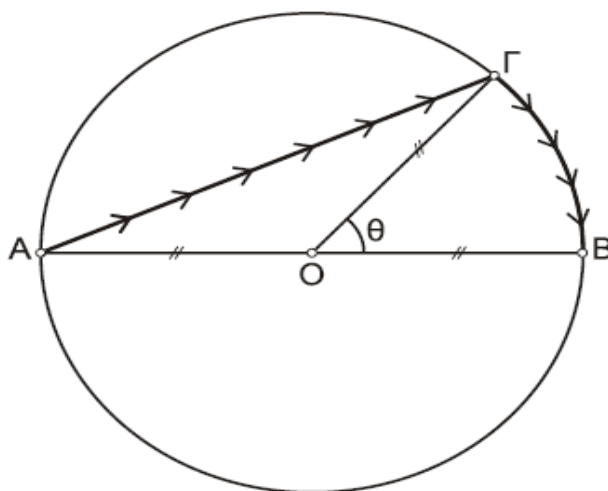
Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο A του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο B .

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο A σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{BO\Gamma} = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο A στο σημείο B ($\theta=0$).

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το A στο B ($\theta=\pi$).



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο A στο σημείο B είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$

και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1, 0)$ είναι η ευθεία $\epsilon: y = x + 1$ (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k+1)$.

Μονάδες 7