

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ. 99

A2. Θεωρία σχολικό σελ. 162

A3. Θεωρία σχολικό σελ. 128

A4. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} \left(\frac{\alpha}{0} \right)$$

Άρα $x=1$

ΚΑΤ. ΑΣ της Cf.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Άρα $y=1$ ΟΡ. ΑΣ της Cf στο $+\infty$.

B2. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln x \text{ στο } [e, e^2]$$

• Η h είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\blacksquare \quad h(e) = \frac{1}{e-1} > 0, \quad h(e^2) = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0, \quad h(e) \cdot h(e^2) < 0$$

Από Θ.Β. η $h(x)=0$ ή $f(x)=g(x)$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2) .

B3.

$$A_\varphi = A_{g \circ f} = \left\{ x \in A_f / f(x) \in A_g \right\} = \left\{ x > 1 \text{ και } \frac{x}{x-1} > 0 \right\} = (1, +\infty)$$

$$\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$\text{B4.} \quad A_\varphi = (1, +\infty)$$

$$A_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Θεωρούμε

$$g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}, \quad x \neq 0$$

Τότε $f(x) = x g(x) + \eta\mu x, \quad x \neq 0$

Η f είναι παραγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε

$$\blacksquare \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x g(x) + \eta\mu x) = 0$$

$$\blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x g(x) + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[g(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 1 = f'(0)$$

ii. $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x.$

Γ2. $f'(x) \cdot f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f''(x) = 2x \Leftrightarrow ([f'(x)^2])' = (x^2)'. \quad \text{Τότε υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ ώστε}$
 $[f'(x)]^2 = x^2 + c. \quad \text{Για } x=0: [f'(0)]^2 = c \Leftrightarrow 1 = c.$

Άρα $[f'(x)]^2 = x^2 + 1 \quad (1)$

$$\sqrt{[f'(x)]^2} = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

Έστω $f'(x) = 0$. Από (1): $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$.

Αδύνατο. Άρα $f'(x) \neq 0$

Επίσης f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η f' διατηρεί το πρόσημό της και επειδή $f'(0) = 1 > 0$ θα ισχύει $f'(x) > 0$.

$$\text{Από (2): } f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Γ3.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}: f''(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Αν } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Αν } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\Sigma\text{Κ.}$	

Η f στο $(-\infty, 0]$, στο $[0, +\infty)$, $\Sigma\text{Κ. } (0, 0).$

Γ4. Η $y = x$ εφάπτεται της C_f στο $(0, 0)$ οπότε:

- Η f  στο $(-\infty, 0]$ άρα

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq x, \quad x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Η f  στο $[0, +\infty)$ άρα

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq x, \quad x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι  στο $\mathbb{R}$ οπότε “1-1” και αντιστρέφεται.

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{x \ln x}, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)}{\left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

(DLH)

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\blacksquare f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x=0$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{x \ln x} (\ln x + 1)] = -\infty$$

(DLH)

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Δ2. i.

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & -1 < x < 0 \\ e^{x \ln x} (\ln x + 1), & 0 < x < \frac{2}{e} \end{cases}$$

- Ένα κρίσιμο σημείο της f είναι το $x=0$ όπου η f δεν παραγωγίζεται.
- Αν $x \in (-1, 0)$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ Αδύνατη
- Αν $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Συνολικά τα σημεία $x=0$, $x=\frac{1}{e}$ είναι κρίσιμα της f .

ii. Πίνακας μεταβολών της f .

x	-1	0	$1/e$	$2/e$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

$$A_1 = [-1, 0], f(A_1) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1]$$

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{e}\right], f(A_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right]$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right], f(A_3) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right)\right]$$

$$\text{Άρα } f(A) = [-1, 1].$$

Δ3. Για κάθε

$$\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq f(\alpha) \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 2f(\alpha) < 2 \\ -1 \leq f(\beta) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3f(\beta) \leq 3 \end{aligned} \right\} -5 \leq 2f(\alpha)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \leq 1$ οπότε ο αριθμός $n = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$ ανήκει στο $f(A)$ και επειδή η f είναι συνεχής από Θ.Ε.Τ. υπάρχει 1 τουλάχιστον

$$\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right] : f(\xi) = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$$

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(x) = xf(x) - f'(x) = xe^{x \ln x} - e^{x \ln x}(\ln x + 1) = e^{x \ln x}(x - \ln x - 1)$, $x > 0$

Γνωρίζουμε ότι: $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow x - \ln x - 1 \geq 0$

Άρα $g(x) \geq 0$ και επειδή η g δεν είναι παντού ίση με 0 στο $\left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} g(x) dx > 0 &\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} (xf(x) - f'(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx > \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx > [f(x)]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \\ &\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr