

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 10

A2. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει:

$$(e^{\sin x})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1$$

δ) Ισχύει ότι:

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 1$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z-3i}$$

B1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

$$\bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

B2. Να αποδείξετε ότι

Μονάδες 4

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sin x$ έχει ακριβώς

μια λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & f(x) > 0 \text{ και } g(x) > 0 \\ & \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \\ \text{ii)} \quad & \\ & \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt \\ \text{iii)} \quad & \end{aligned}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 260 σχολικό βιβλίο

A2. Σελίδα 280 σχολικό βιβλίο

A3. α) Σ , β) Σ , γ) Λ , δ) Λ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $|z - 3i| = |\overline{z - 3i}| = |\bar{z} + 3i|$. Οπότε
 $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$. Άρα ο

γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος C με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

B2. Έχουμε

$$|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1$$

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

Άρα

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

B3.

Άρα $w \in \mathbb{R}$

Α' τρόπος

Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχουμε } C: x^2 + (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (y - 3)^2 \geq 0, \text{ οπότε } x \in [-1, 1]$$

Οπότε

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$$

Β' τρόπος:

$$|w| = \left| z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \right| \leq |z - 3i| + \left| \frac{1}{z - 3i} \right| = |z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$$

$$\text{Άρα } -2 \leq w \leq 2$$

B4.

Α' τρόπος

$$|z - w| = |x + yi - 2x| = |-x + yi| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Β' τρόπος

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \Leftrightarrow z - w = 3i - \frac{1}{z - 3i}$$

Έχουμε

$$|z - w| = \left| 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = \left| 3i - (\bar{z} + 3i) \right| = |-\bar{z}| = |z|$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. Έχουμε: } e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \quad \text{ή}$$

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x) \quad \text{ή}$$

$$(e^{xf(x)} - e^x)' = (xf(x))'$$

Άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{xf(x)} - e^x = xf(x) + c_1, x \in \mathbb{R}$

Για $x=0$ έχουμε: $e^{0f(0)} - e^0 = 0f(0) + c_1$, οπότε $c_1 = -1$

Επομένως

$$e^{xf(x)} - e^x = xf(x) - 1 \Leftrightarrow (e^x - x)f(x) = e^x - 1 \quad (1)$$

Αν $g(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}$ τότε $g(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

Επειδή $g(0)=0$, $g(x) < 0$, για κάθε $x < 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, η g στο $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0) = 1$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$

Από (1) προκύπτει:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Επομένως $f(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$ ή $f(x) = \ln(e^x - x)$

Άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = \ln(e^x - x) + c_2, x \in \mathbb{R}$

Για $x=0$ έχουμε: $f(0) = \ln 1 + c_2$, οπότε $c_2 = 0$

Επομένως $f(x) = \ln(e^x - x), x \in \mathbb{R}$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Το πρόσημο της f' , το είδος μονοτονίας της f και το ακρότατο της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bullet$	$+$
$f(x)$	Γνησίως φθίνουσα		Γνησίως αύξουσα

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για $x = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Οπότε

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = e^x(1 - x)$

Έχουμε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h'	$+$	$\bullet$	$-$
h	Γνησίως αύξουσα		Γνησίως φθίνουσα

$$h(1) = e - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -\infty$$

$$A_1 = (-\infty, 1]$$

▪ Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_1 ,

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(1) \right] = (-1, e-1]$$

οπότε

και αφού

$$\exists x_1 \in (-\infty, 1) \text{ υπάρχει μοναδικό } x_1 \text{ ώστε } f(x_1)=0 \text{ και } h(x_1)=0$$

δηλαδή

$$\Gamma_{\text{Ia}} \mathbf{x}_1 < \mathbf{x} < 1_{\text{Ia}} \mathbf{x}_1 \text{ είναι } h(\mathbf{x}_1) < h(\mathbf{x}) \hat{U} \text{ } h(\mathbf{x}) > 0, \text{ δηλαδή}$$

Για $x < x_1$ είναι $h(x) < h(x_1) \hat{U} h(x) < 0$, δηλαδή
 $f(x) < 0$

Η f στο x_1 παρουσιάζει σημείο καμπής

- Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο

$A_2 = [1, +\infty)$, οπότε

$$h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right) = (-\infty, e-1]$$

και αφού

$$0 \in h(A_2) \quad \text{υπάρχει μοναδικό} \quad x_2 \in (1, +\infty) \quad \text{ώστε} \quad h(x_2) = 0, \\ f(x_2) = 0$$

δηλαδή

$$\Gamma_{\alpha} \quad 1 < x < x_2 \text{ είναι } h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0 \quad , \text{ δηλαδή}$$

Για $x > x_2$ είναι $h(x) < h(x_2) \hat{=} h(x) < 0$, δηλαδή
 $f(x) < 0$

Η f στο $X=X_2$ παρουσιάζει σημείο καμπής

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$j(x) = \ln(e^x - x) - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$j(0) = \ln 1 - \sin 0 = -1 < 0$$

$$j\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln e^{\frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

$$j(0) \cdot j\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Άρα, , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η

εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ έχουμε } j(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \ln x > 0$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η εξίσωση

$\varphi(x) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μια

λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $u = x + t$

$$du = (x+t)dt \quad \begin{array}{l} \text{Για } t = 0 \text{ έχουμε } u = x \\ \text{Για } t = -x \text{ έχουμε } u = 0 \end{array}$$

$$du = dt$$

$$\text{Οπότε } \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = - \frac{\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du}{e^{2x}}$$

Επομένως

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = - \frac{\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du}{e^{2x}} \Leftrightarrow 1 - f(x) = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο
συνεχών συναρτήσεων η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ είναι
παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα
παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$g'(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση
είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Από (1),(2) προκύπτει:

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \quad \text{οπότε, υπάρχει}$$

$$\text{σταθερά } c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{ώστε} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = c_1, x \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε: $c_1=1$, αφού $f(0) = g(0) = 1$. Άρα $f(x) = g(x)$,
 $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta 2. \text{ Έχουμε } f'(x)g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = e^{2x}$$

$$\frac{f^2(x)}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + c_1$$

$$\text{Οπότε υπάρχει } c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ώστε} \quad \frac{f^2(x)}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + c_1$$

Για $x=0$: $f(0)=0$. Επομένως $f(x)=e^{2x}$ και αφού
 $f(x)>0, x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x)=e^x, x \in \mathbb{R}$

Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-u})^{\frac{1}{2}}}{(u)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (-e^{-u}) = -\infty$$

Δ4. $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt = \int_1^x e^{t^2} dt, x \in \mathbb{R}$

Επειδή η συνάρτηση $f(t) = e^{t^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (οπότε και συνεχής στο $\mathbb{R}$) με

$$F'(x) = e^{x^2} > 0, x \in \mathbb{R}$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $F(x) \leq F(1) = 0$

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τους άξονες x' και y' και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι:

$$E(\Omega) = - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 (x)^{\frac{1}{2}} F(x) dx = - \int_0^1 x F(x) dx =$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2} - 1}{2} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{2}$$

Επιμέλεια: Κούσης Π. – Σιφναίος Δ. – Τζωρτζίνης Ι. – Φιλιόγλου Β. – Φλωρόπουλος Α.