

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) $(\varphi(x))' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x | \eta \mu x = 0\}$

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\begin{aligned} |z-1|^2 + |z+1|^2 &= 4 & (1) \\ |w-5w|^2 &= 12 & (2) \end{aligned}$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με την εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

ερωτήματος Γ₂, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f(x))^{f(x)}] \frac{1}{f(x)} -$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt, x > 0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 4).}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου 253

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 191

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 258

Α4. α) Σ , β) Σ, γ) Λ, δ) Λ , ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Έχουμε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$$

$$\text{Έχουμε } |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2| = \sqrt{2}.$$

Β3. Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } |w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{16x^2 + 36y^2} = 12 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

. Άρα ο

γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι έλλειψη με τις εστίες της πάνω στον άξονα $x'x$ και σταθερό άθροισμα $2a = 6$.

$$\text{Έχουμε } \alpha = 3, \beta = 2, \text{ οπότε } |w|_{\max} = a = 3 \quad \text{και} \quad |w|_{\min} = b = 2.$$

$$\text{Β4. Έχουμε } 2 \leq |w| \leq 3$$

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 3 = 4$$

$$|z - w| \geq ||z| - |w|| \geq |w| - 1 \geq 1$$

$$\text{Άρα } 1 \leq |z - w| \leq 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$ και $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$

Το πρόσημο και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $D_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $D_2 = [1, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right) = +\infty$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $D_1 = (0, 1]$

$$f(D_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right) = (-\infty, 0]$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$D_2 = [1, +\infty) \quad \text{τότε} \quad f(D_2) = \left(f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f((0, +\infty)) = f(D_1) \cup f(D_2) = (-\infty, +\infty)$$

Γ2. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $D_1 = (0,1]$ και $2012 \in f(D_1)$ τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in (0,1)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $D_2 = [1, +\infty)$ και $2012 \in f(D_2)$ τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^x f(x) - 2012$, $x \in [x_1, x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x) = e^x (f'(x) + f(x)) - 2012$.

$$h(x_1) = e^{x_1} f(x_1) - 2012 = 0, \text{ αφού } f(x_1) = 2012.$$

$$h(x_2) = e^{x_2} f(x_2) - 2012 = 0, \text{ αφού } f(x_2) = 2012.$$

$$\text{Οπότε } h(x_1) = h(x_2).$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} (f'(x_0) + f(x_0)) - 2012 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012.$$

Γ4. Έχουμε $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

$$\text{Είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επειδή η g συνεχής στο $[1, e]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(W) = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \quad \text{τμ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και αφού $f(x) \neq 0$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Θέτουμε
$$g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}, x \in (0, +\infty)$$

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε η $h(x) = \int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty)$. Η $g_1(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x)$ και x^2-x+1 . Η

$g_2(x) = -\frac{x-x^2}{e}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα των

παραγωγίσιμων συναρτήσεων g_1 και g_2 με

$$g'(x) = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1}{e}(-2x), x > 0. \text{ Έχουμε}$$

$g(x) \geq 0, x \in (0, +\infty)$ και αφού $g(1) = 0$ τότε $g(x) \geq g(1), x \in (0, +\infty)$.

Άρα η g στο 1 (εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$) παρουσιάζει ελάχιστο και αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε από το θεώρημα Fermat

έχουμε $g'(1) = 0 \hat{=} f(1) = -\frac{1}{e} < 0$. Οπότε η $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα
$$\ln x - x = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e^{-\frac{1}{f(x)}}, x \in (0, +\infty) \quad (1)$$

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

Θεωρούμε την συνάρτηση $j(x) = \ln x - x, x \in (0, +\infty)$.

$$j'(x) = \frac{1-x}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Έχουμε

Είναι $j'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, j'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $j'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα για $x = 1$ η j παρουσιάζει μέγιστο το $j(1) = -1$, οπότε $j(x) \leq j(1) = -1 < 0$.

Επομένως $\ln x - x < 0, x \in (0, +\infty)$.

Από (1) έχουμε $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e = \frac{\ln x - x}{f(x)} > 0, x \in (0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}, x \in (0, +\infty)$$

Άρα

Η $j(x) = \ln x - x$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα των

παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\ln x$ και $-x$. Επειδή $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής στο

$(0, +\infty)$ τότε $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και άρα η

$K(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Επομένως η f

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων j και K .

$$\text{Για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ έχουμε } \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \quad (2)$$

.Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) παίρνουμε

$$\frac{(\ln x - x)'}{f(x)} = \frac{\ln x - x}{f(x)}, x \in (0, +\infty)$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x, x \in (0, +\infty)$. Για

$x = 1$ προκύπτει $c = 1$. Οπότε $f(x) = e^{-x}(\ln x - x), x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}(\ln x - x) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Θέτουμε $u = \frac{1}{f(x)}$, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{f(x)^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \cdot u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} = 0 \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = f(x), x \in (0, +\infty)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F'(x) = f'(x) &= -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x + 1 \right) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) > 0, x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

αφού $\ln x \leq x - 1, x \in (0, +\infty)$.

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Η F είναι συνεχής στο $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$, οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $x_1 \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

Η F είναι συνεχής στο $[2x, 3x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x, 3x)$, οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $x_2 \in (2x, 3x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}.$$

Έχουμε $0 < x_1 < x_2$ και αφού η F είναι κυρτή $(0, +\infty)$ τότε η F' είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε

$$F'(x_1) < F'(x_2) \hat{=} \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(x)}{x} \hat{=}$$

$$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(x) \hat{=}$$

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), x \in (0, +\infty).$$

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $G(x) = 2F(x) - F(b) - F(3b), x \in (0, +\infty)$.

Έχουμε $G'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0, x \in (0, +\infty)$. Οπότε η G είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η G είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$

$G(b) = F(b) - F(3b)$, επειδή $F'(x) = f(x) < 0, x \in (0, +\infty)$, τότε η F είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και αφού $\beta < 3\beta$ θα είναι $F(\beta) > F(3\beta)$, οπότε $G(\beta) > 0$.

$$G(2b) = 2F(2b) - F(b) - F(3b) < 0 \text{ από } \Delta 3.$$

Επομένως $G(b) \times G(2b) < 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in (b, 2b)$ τέτοιο ώστε

$G(x) = 0 \Leftrightarrow F(b) + F(3b) = 2F(x)$, και αφού η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ το x είναι μοναδικό.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.