

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

A2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A

Μονάδες 4

A3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $x > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).

δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

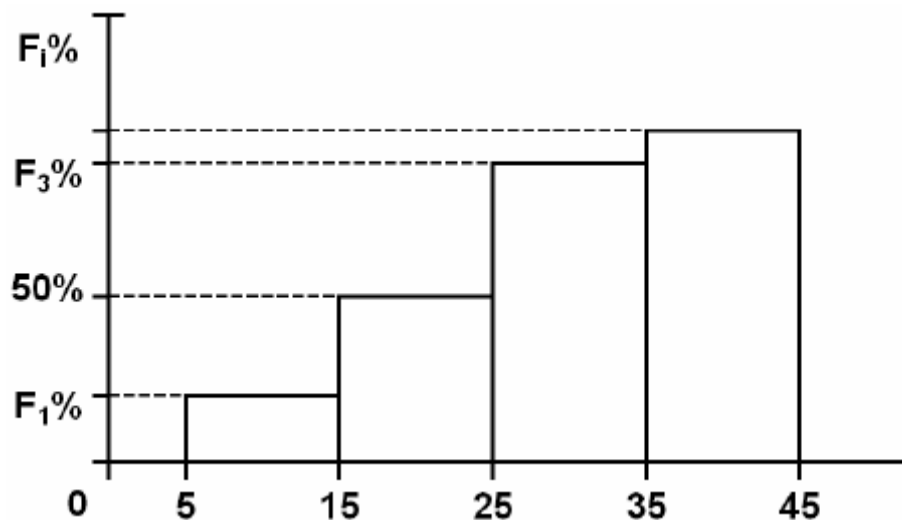
ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



B1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

B2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, \cdot)$		$\alpha+4$			
$[\cdot, \cdot)$		$3\alpha-6$			
$[\cdot, \cdot)$		$2\alpha+8$			
$[\cdot, 45)$		$\alpha-2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

B3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$
- μια τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 9

Γ2. Να αποδείξετε ότι $n = 3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}, x > 0$$

Δίνεται η συνάρτηση

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKML$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους

x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 31

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 148

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 96

A4.

α) Λ

β) Σ

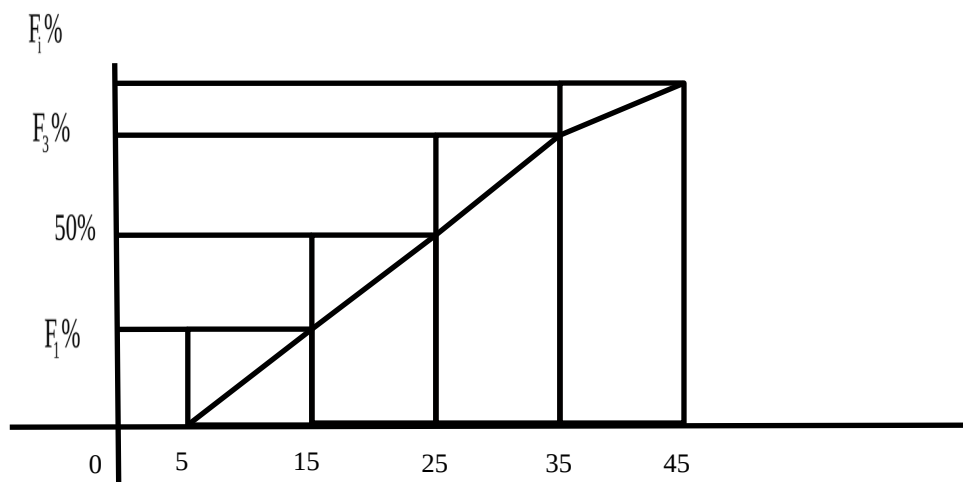
γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.



Η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$, οπότε $\delta = 25$

B2. $v = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = 7\alpha + 4$

$$f_1 = \frac{a + 4}{7a + 4} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{3a - 6}{7a + 4}$$

$$f_1 + f_2 = F_2 \Leftrightarrow \frac{a + 4}{7a + 4} + \frac{3a - 6}{7a + 4} = \frac{50}{100} \Leftrightarrow a = 8$$

Χρόνοι	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3.

Χρόνοι	x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[5,15)	10	12	120	1200
[15,25)	20	18	360	7200
[25,35)	30	24	720	21600
[35,45)	40	6	240	9600
Σύνολο		60	1440	39600

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{1440}{60} = 24$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} = \frac{\sum x_i^2 v_i}{v} - (\bar{x})^2 = \frac{39600}{60} - 24^2 = 84$$

$$\text{Άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84}; 9,17$$

B4. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα.

Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά για

$$\frac{4}{5} f_4 \% = \frac{4}{5} \cdot 10\% = 8\%$$

να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα είναι

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα:

Γ: Ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά

I: Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά

$$P(G) = \frac{3n}{n^2 + 1}$$

Έχουμε

$$R(I) = \frac{n+2}{n^2+1}$$

$$R(G \cap I) = \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$R(G \cup I) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3} - 2)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3})^2 - 4}{(x^2 + x)(\sqrt{x^2+3} + 2)} =$$

Γ1. Έχουμε

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3} + 2)} = 1$$

. Οπότε το $G \cup I$

είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. Έχουμε

$$R(G \cup I) = R(G) + R(I) - R(G \cap I) \Leftrightarrow \frac{3n}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} - \frac{n+1}{n^2+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n = 0 \Leftrightarrow n = 3$$

Γ3. Τα ενδεχόμενα $\Gamma - I$ και $I - \Gamma$ είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε:

$$R(G \cup I) = R(G) + R(I) - R(G \cap I)$$

$$= R(G) - R(G \cap I) + R(I) - R(G \cap I) = R(G \cup I) - R(G \cap I) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$$

$$R(G \cap I) = \frac{N(G \cap I)}{N(W)} \Leftrightarrow N(W) = \frac{N(G \cap I)}{R(G \cap I)} = \frac{32}{\frac{2}{5}} = 80$$

Γ4.

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{(1 + \ln^2 x)x - (1 + \ln^2 x)(x)}{x^2} = \frac{2 \ln x (\ln x)x - 1 - \ln^2 x}{x^2} =$$

$$= \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x - 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0$$

για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$. Οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\Delta 2. E(x) = OK \cdot OL = x \cdot f(x) = \ln^2 x + 1, x > 0$$

$$E'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, x > 0$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$ και αφού $OK = OL = 1$ το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο.

$$\Delta 3. l = f(1) = -1. \text{ Οπότε } \varepsilon: y = -x + \beta.$$

$$\text{Έχουμε } \bar{y} = -\bar{x} + b = b - 10.$$

$$s_y = |b - 1| s_x = 2$$

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{|b - 10|}$$

. Το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι

$$CV_y \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|b - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |b - 10| \geq 20 \Leftrightarrow$$

ομοιογενές αν και μόνο αν

$$b - 10 \leq -20 \text{ ή } b - 10 \geq 20 \Leftrightarrow b \leq -10 \text{ ή } b \geq 30$$

$$\Delta 4. \text{ Επειδή } A \cap B \neq \emptyset \text{ και } A \subset B \text{ ή } B \subset A \text{ τότε } 0 < R(A) \leq R(A \cup B)$$

$$\text{και } 0 < R(A \cap B) \leq R(A \cup B).$$

$$(\text{Είναι } P(A) > 0 \text{ και } R(A \cap B) > 0 \text{ αφού } A \neq \emptyset \text{ και } A \cap B \neq \emptyset)$$

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

Αφού f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ και $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$, οπότε $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.