

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 7

A2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ αν και μόνο αν f είναι συνεχής στο x_0

(μονάδες 2)

β) $(cf(x))' = cf'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3)$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα και

Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B) \leq \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους c , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$fi\%$	Fi	$Fi\%$
$[\alpha, .)$				λ
$[. , .)$				$3\lambda+10$
$[. , .)$				
$[. , .)$				$\kappa\lambda^2-2\lambda+10$
$[. , .)$				$\kappa\lambda^2-3\lambda+30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=1$ και $\lambda=10$

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10$, $f_2\%=30$, $f_3\%=20$, $f_4\%=30$ και $f_5\%=10$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha=10$ και $c=4$

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες η ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1, x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \frac{1}{3}$, όπου $i=1, 2$

και $P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B και Γ του δειγματικού χώρου Ω με $A = \{\omega \in \Omega / f'(\omega) \leq 0\}$, $A = \{\omega \in \Omega / f(\omega) > 1\}$

και

$\Gamma = \{\omega \in \Omega / x^2 + \omega x \geq -\frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$ και $P(A-B)$

(μονάδες 8)

Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45°

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_k(\omega_k, y_k)$, $k=1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y=x+1$ με $\omega_k = \frac{1}{k}$ και $y_k = 5$

τότε να υπολογίσετε τα ω_3 και ω_4 του δειγματικού χώρου Ω, όπου

δ_{ω_k} : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_k ,

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

δ_{y_k} : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_k και
 R_{y_k} : το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_k

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
A4. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = [2e^x(2x-3)]' = 2e^x(2x-1)$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Είναι

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$, η f είναι γνησίως
 φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$. Στο $x = \frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την
 $f(\frac{1}{2}) = 2e^{1/2}(2 \cdot \frac{1}{2} - 3) = -4\sqrt{e}$.

B2. $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{-(-4\sqrt{e})}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

B3. Έστω ότι A, B είναι ασυμβίβαστα τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$$

ΑΤΟΠΟ.

Οπότε A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

B4. Αρκεί $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$ δηλαδή $P(A' - B') \geq \frac{1}{6}$ και $P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$
 Ισχύει $A' - B' \subseteq A'$ οπότε
 $P(A' - B') \leq P(A)$ ή
 $P(A' - B') \leq 1 - P(A)$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$P(A' - B') \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad \text{άρα} \quad P(A' - B') \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Θα δείξουμε} \quad P(A' - B') \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad P[(A' \cap (B'))'] \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή}$$

$$P(A' - B') \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad P(B - A) \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad P(B) - P(A \cap B) \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή}$$

$$\frac{2}{3} - P(A \cap B) \geq \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \geq P(A \cap B) \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) \leq \frac{1}{2} \quad \text{ή}$$

$$P(A \cap B) \leq P(A) \quad \text{ισχύει αφού} \quad A \cap B \subseteq A.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$.

Από τους τύπους VIETA

$$F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \quad \text{ή} \quad F_3 = \frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad F_5 = \frac{3}{5}$$

$$F_3 \cdot F_5 = \frac{3k}{5} \quad \text{ή} \quad k = 1$$

$$\lambda = 10$$

$$\lambda = -7$$

$$\lambda = -7 \quad \text{Απορ.}$$

$$\text{Επειδή} \quad F_5\% = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10.$$

Γ2. Οπότε $f_1\% = \lambda = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$, $f_5\% = 10$.

$$f_1\% + \frac{f_2\%}{2} = 25\% \quad \text{οπότε} \quad x_2 = 16$$

$$f_5\% + \frac{f_4\%}{2} = 25 \quad \text{οπότε} \quad x_4 = 24$$

$$\text{Είναι} \quad x_2 + 2c = x_4 \Leftrightarrow c = 4.$$

1^η κλάση $[\alpha, \alpha+4)$

2^η κλάση $[\alpha+4, \alpha+8)$

$$x_2 = \frac{\alpha+4+\alpha+8}{2} \quad \text{ή}$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$20 = \frac{2 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow 2 = \quad \text{άρα } \boxed{\alpha=10}.$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10, 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
Σύνολα		100		

$$\frac{40}{100} = \frac{800}{\omega}$$

Γ4. Έχουμε $\omega = 2000$.

ΘΕΜΑ Δ

$$P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Δ1. α)

$$P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 0 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1} + 1 \right)' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{οπότε}$$

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x - 1} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \quad \text{οπότε}$$

$$P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\omega \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\omega^2}{(\omega^2 + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \leq 0 \Leftrightarrow \omega = 0$$

β)

$$\omega \leq 1 \quad \text{ή} \quad \omega \geq 1. \quad \text{Άρα } A\{-1, \omega_3, \omega_4\} \text{ και}$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\omega \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega \geq 1 \Leftrightarrow \omega \geq 1$$

$$P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$B = \{\omega_3, \omega_4\}$ οπότε

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } x^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ οπότε } \Delta \leq 0$$

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 1 \text{ άρα } \Gamma = \{-1, 0\}$$

$$P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Οπότε

$$P(A - B) = P(-1) = \frac{1}{6}$$

Είναι $A - B = \{-1\}$ οπότε

Δ2. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - x_0}{(x_0^2 + 1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της cf στο M είναι $y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$.

Δ3. $M_1(\omega_1, y_1)$ όπου $\omega_1 = -1$ και $y_1 = -1 + 1 = 0$

$M_2(\omega_2, y_2)$ όπου $\omega_2 = 0$ και $y_2 = 0 + 1 = 1$

$M_3(\omega_3, y_3)$ όπου $y_3 = \omega_3 + 1$

$M_4(\omega_4, y_4)$ όπου $y_4 = \omega_4 + 1$ και αφού $1 < \omega_3 < \omega_4$.

Είναι $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$$y_4 - y_1 = \omega_4 - \omega_1 = \omega_4 + 1 - 0 = \omega_4 + 1$$

$$\omega_3 = \omega_3$$

$$\delta_\omega = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2} = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2}$$

$$y_4 - y_3 = \omega_4 + 1 - (\omega_3 + 1) = \omega_4 - \omega_3$$

$$\delta_y = \frac{y_4 - y_3}{2} = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_4 - \omega_3}{2} = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega_4 - \omega_3}{2} = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2}$$

Είναι $2\delta_\omega = \delta_y$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

**ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

**ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. –
ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.**