

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό Z ισχύει $\overline{\overline{Z}} = -Z$ (μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη (μονάδες 2)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ (μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$ (μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση $2x^2 - |w - 4 - 3i|x - 2|z|, x \in \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα, την $x=1$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1=1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4, 3)$ και ακτίνα $\rho_2=4$.

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

Μονάδες 5

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 0 \quad \text{και} \quad |z + w| \leq 0$$

Μονάδες 6

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z - 2\bar{z}| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{1-\xi} f(t) dt = 1 - f(\xi^2 - \xi)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_0^x \left(\int_0^u \frac{f'(t)^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ για κάθε $x > 0$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0)=0$.

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = (f'(x))^3 \quad \text{με } x \geq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Μονάδες 4

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι :

α. $g(x) \geq -x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A4. α. Σ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Λ, **ε.** Σ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $2x^2 - |w-4-3|x+2|z|=0 \quad (1)$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

Είναι $\Delta=0$ δηλαδή $|w-4-3i|^2 - 16|z|=0$ (I)

Το 1 είναι ρίζα της (1) οπότε:

$2-|w-4-3i|+2|z|=0$ (II)

Από (I) (II) έχουμε

$$|w-4-3i|^2 - 8(-2+|w-4-3i|)=0 \Leftrightarrow$$

$$|w-4-3i|^2 - 8|w-4-3i| + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|w-4-3i|^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$$

Οπότε ο Γ.Τ. των εικόνων του w είναι κύκλος με $K(4, 3)$ και $\rho_1=4$.

Η (I) γίνεται $|z|=1$ οπότε $|z|=1$ άρα ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με $K_2(0, 0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

B2. Βρίσκουμε το κοινό σημείο των δύο γεωμετρικών τόπων λύνοντας το (Σ):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 16 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{4}{5} \\ y &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Άρα ο μοναδικός μιγαδικός που η εικόνα του ανήκει και στους δύο

Γεωμετρικούς τόπους είναι ο $z = w = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

Β' Τρόπος:

$K_1 K_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$ και $P_1 + P_2 = 4 + 1 = 5$ οπότε οι κύκλοι c_1, c_2 εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο A που είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο.

B3. Ισχύει $|w-4-3i|=4$

Ομως $||w| - |-4-3i|| \leq |w+(-4-3i)| \leq |w| + |-4-3i|$

Άρα $||w| - 5| \leq 4$ οπότε $-4 \leq |w| - 5 \leq 4$ δηλαδή $1 \leq |w| \leq 9$

Έχουμε $|z+w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow$

$$|z+w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z+w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$|z+w| \leq 0 \quad .$$

$$\begin{aligned} \text{Ομοία } |z-w| &\leq |z| + |w| \Leftrightarrow \\ |z-w| &\leq 1 + |w| \Leftrightarrow \\ |z-w| &\leq 1 + 9 \Leftrightarrow \\ |z-w| &\leq 10 \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B4. Είναι } |2z^2 - 3z - 2\bar{z}| &= 5 \quad \Leftrightarrow \\ |z(-z - 2\bar{z} - 3)| &= 5 \\ |z||2z - 2\bar{z} - 3| &= 5 \\ |2z - 2\bar{z} - 3| &= 5 \end{aligned}$$

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε } |2x + 2yi - 2x + 2yi - 3| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|-3 + 4yi| = 5 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9 + 16y^2} = 5$$

$$16y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ή } y = -1.$$

Αν $y = 1$ από την σχέση $x^2 + y^2 = 1$ προκύπτει $x = 0$ οπότε $z_1 = 0 + i = i$.

Αν $y = -1$ από την σχέση $x^2 + y^2 = 1$ προκύπτει $x = 0$ οπότε $z_2 = 0 - i = -i$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \text{Γ1. Είναι } 2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] &= -f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{οπότε} \\ [(x^2 + 1)f(x) - x^3]' &= 0 \quad \text{άρα } (x^2 + 1)f(x) - x^3 = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned}$$

$$2f(1) - 1 = c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Για $x = 1$ έχουμε

$$(x^2 + 1)f(x) - x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \div \frac{0}{x^2 + 1} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Γ2. Για } x \rightarrow -\infty \quad \text{έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 =$$

και

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Οπότε η γραφική παράσταση της f στο $-\infty$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

Άρα η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

$$\Gamma 3. f[5(x^2 + 1)^3 - 8] \leq f[8(x^2 + 1)^2] \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 - 8(x^2 + 1)^2 - 8 \leq 0$$

Θέτουμε $x^2 + 1 = y$ οπότε

$$5y^3 - 8y^2 - 8 \leq 0$$

$$(y - 2)(5y^2 + 2y + 4) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (5y^2 - 2y + 4 > 0 \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R})$$

$$y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 2 \quad \text{ή}$$

$$x^2 + 1 \leq 2 \quad \text{ή}$$

$$x^2 \leq 1 \quad \text{ή}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\Gamma 4. \text{Θεωρούμε την συνάρτηση} \quad \Theta(x) = x \int_{x^3-x}^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η $\int_{x^3-x}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η $g(x) = x^3 - x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε η $\int_{x^3-x}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Οπότε η $\Theta(x) = x \int_{x^3-x}^x f(t) dt$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η $\Theta(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0, 1)$ με

$$\Theta'(x) = \int_{x^3-x}^x f(t) dt + x f(x^3 - x)(3x^2 - 1)$$

$$\Theta(0) = 0 \quad \text{και} \quad \Theta(1) = 0.$$

Οπότε από Θ , Rolle υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (0, 1) : \Theta(\xi) = 0$ δηλαδή

$$\int_{\xi^3-\xi}^{\xi} f(t) dt + \xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$\int_0^{3-\xi} f(t) dt = \xi(3\xi^3 - 1) \quad \xi > 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f' είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής.

Η $\kappa(t) = \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}$ είναι συνεχής άρα $\int \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη και άρα συνεχής.

Οπότε η $\int_0^x \left(\int_0^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη και

η $f(x) = x + \int_0^x \left(\int_0^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 1 + \int_0^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt, \quad x > 0 \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)}, \quad x > 0, \text{ άρα}$$

$$f''(x) \cdot f(x) = (f'(x))^2 - 1 \Leftrightarrow f''(x)f(x) + 1 = (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Δ2. α) Είναι $f(x) \cdot f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(1) = 1 + 0 = 1 > 0$ οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f'(1) = 1 + 0 = 1 > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Είναι $(f'(x))^2 = 1 + f(x)f''(x)$ για κάθε $x > 0$ οπότε

$$f'(x) = \sqrt{1 + f(x)f''(x)}.$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + f(x)f''(x)} = \sqrt{1 + 0 \cdot f''(0)} = \sqrt{1} = 1.$$

Δ3. α) Είναι $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και $g'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = \frac{-1}{f^2(x)}$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

$$\text{Οπότε } g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = 1 \quad \text{και} \quad g'(1) = \frac{-1}{f^2(1)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Άρα η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, g(1))$ είναι

$$ε: y - g(1) = g'(1)(x - 1) \text{ ή } y = -x + 2.$$

Αφού η g είναι κυρτή η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της οπότε

$$g(x) \geq x + 2 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για το σημείο A .

$$\beta) \text{ Έχουμε } g(x) \geq x + 2 \quad \text{για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq x + 2 \quad \text{για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq (2 - x)f(x), f(x) > 0.$$

$$\text{Άρα } f'(x) - (2 - x)f(x) \geq 0.$$

$$\text{Το «}\Rightarrow\text{» δεν ισχύει παντού και για } x = 0 \text{ είναι } f'(0) - (2 - 0)f(0) > 0$$

$$\text{Άρα } \int_0^1 [f'(x) - (2 - x)f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 (2 - x)f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)]_0^1 - \int_0^1 (2 - x)f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (2 - x)f(x) dx < 1.$$

Δ4. Επειδή $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι

$$E = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx =$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 f'(x) dx = [[f'(x)]^2 f(x)]_0^1 - \int_0^1 2f'(x)f''(x)f(x) dx =$$

$$(f'(1))^2 f(1) - (f'(0))^2 f(0) - \int_0^1 2f'(x)(f'(x))^2 - 1] dx$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 (f'(x))^3 - f'(x) dx$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 (f'(x))^3 dx + 2 \int_0^1 f'(x) dx$$

$$= E - 2[f(x)]_0^1$$

$$= E - 2(f(1) - f(0))$$

$$= E - 2 +$$

$$= E - 2.$$

$$\text{Άρα } E = 3 - 2E$$

$$3E = 3 \text{ οπότε } E = 1.$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013**

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. –
ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.