

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\text{και } |\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$\alpha^3 v^* - \alpha^2 v^* - \alpha + 0 =$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_x^{\alpha} \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \quad \text{και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{3x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_x^{\alpha} \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σε 334

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

A4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} (z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$$

$$\text{Οπότε } |z-2|=1 \quad \text{ή} \quad |z-2|=-2 \quad (\text{αδύνατη})$$

Άρα ο γεωμετρικό τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

$$\text{Έχουμε } |z|=|(z-2)+2| \leq |z-2|+2=3, \text{ οπότε } |z| \leq 3$$

$$\mathbf{B2.} \text{ Έστω } z_1=k+li \quad \text{και} \quad z_2=k-li \quad \text{με } k, l \in \mathbb{R}, l > 0.$$

$$\text{Έχουμε } |\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2l| = 2 \Leftrightarrow l = 1 \quad \text{άρα} \quad z_1=k+i \quad \text{και} \quad z_2=k-i$$

$$\text{Έχουμε } |z_1-2|=1 \Leftrightarrow |(k-2)+i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(k-2)^2+1}=1 \Leftrightarrow k=2$$

$$\text{Άρα } z_1=2+i \quad \text{και} \quad z_2=2-i.$$

$$\text{Είναι } z_1+z_2=-b \Leftrightarrow b=-4 \quad \text{και} \quad z_1z_2=g \Leftrightarrow g=5$$

B3. Αφού οι μιγαδικοί αριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1, τότε θα είναι:

$$|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3 \quad \text{και} \quad |\alpha_2| \leq 3.$$

$$\text{Έχουμε } \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 - (\alpha^2 + \alpha + 0)$$

$$\text{Άρα } |\alpha^3| = |\alpha^2 + \alpha + 0| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha^3| = |\alpha^2 + \alpha + 0| \leq |\alpha^2| + |\alpha| + |0| \leq |\alpha|^2 + |\alpha| + 0 \leq |\alpha|^2 + |\alpha| + 1 < 1.$$

$$\text{Επομένως } |v|^3 - 3(|v|^2 + |v| + 1) \leq 0 < 1.$$

$$\text{Άρα } |v|^3 - 1 - 3(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(|v|-1)(|v|^2 + |v| + 1) - 3(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(|v|-4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \quad \text{και αφού } |v|^2 + |v| + 1 > 0$$

$$\text{Θα είναι } |v|-4 < 0 \quad \text{δηλαδή} \quad |v| < 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $2(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow$

$$(f(x) + x)^2 = x^2$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε $(f(x) + x)^2 = x^2 + c, x \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ έχουμε $c = 1$

$$\text{Επομένως } (f(x) + x)^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } j(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Οπότε η σχέση (1) γράφεται } j^2(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$

Η j είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $j(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$

Οπότε η j διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $j(0) = f(0) + 0 = 1$, τότε $j(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

Άρα

$$j(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, x \in \mathbb{R}, \text{ αφού}$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } \sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η f '1-1'.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$\text{Έχουμε } g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1), x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g'	+			+
g	Γνησίως αύξουσα	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα	

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

- Στο $A_1 = (-\infty, -1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_1) = (-\infty, -\frac{1}{2}]$ και αφού $0 \notin g(A_1)$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_1 .
- Στο $A_2 = [-1, 0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε $g(A_2) = [-1, -\frac{1}{2}]$ και αφού $0 \notin g(A_2)$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα στο A_2 .
- Στο $A_3 = [0, +\infty)$ οπότε η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_3) = [-1, +\infty)$ και αφού $0 \in g(A_3)$, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ ακριβώς μία ρίζα στο A_3 .

Άρα η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \int_0^{x-\frac{p}{4}} f(t) dt \cdot \ln x$, $x \in [0, \frac{p}{4}]$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{p}{4}]$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{p}{4}]$.

Η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{p}{4}} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{p}{4}]$ (άρα και συνεχής), ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^x f(t) dt$ και $x - \frac{p}{4}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0, \frac{p}{4}]$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{p}{4}} f(t) dt$ και $\ln x$.

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{p}{4})$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{p}{4}} f(t) dt$ και $\ln x$ με $h'(x) = \sin x \int_0^{x-\frac{p}{4}} f(t) dt + \ln x \cdot f(x - \frac{p}{4})$.

- $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle

$$\begin{aligned} & \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (0, \frac{p}{4}) \text{ τέτοιο, ώστε:} \\ h f(x_0) = 0 & \Leftrightarrow f(x_0 - \frac{p}{4}) \sin x_0 + \sin x_0 \int_0^{x_0 - \frac{p}{4}} f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \\ & \int_{x_0 - \frac{p}{4}}^0 f(t) dt = f'(\xi) \cdot x_0 - \frac{p}{4} f'(\xi) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned} \Delta 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} + \frac{f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \\ &= 5 \cdot f'(1) + f'(1) = 0 \end{aligned}$$

Άρα $6f'(1) = 0$, οπότε $f'(1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει ότι:} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1) \quad \text{και} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1) \end{aligned}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$ άρα

Για $x < 1$ έχουμε $f'(x) < f'(1) = 0$

Για $x > 1$ έχουμε $f'(x) > f'(1) = 0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.

Δ2. Η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και $x > 1$.

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

$$K(x) = \int_x^{x+1} g(u) du, x > 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x) = - \int_2^x g(u) du + \int_2^{x+1} g(u) du, x > 1$$

Η $K(x)$ γράφεται

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $K'(x) = g(x+1) - g(x) > 0, x \in (1, +\infty)$, αφού $x+1 > x$ και g γνησίως αύξουσα.

Οπότε η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Η ανίσωση γίνεται

$$K(8x^2 + 5) > K(2x^4 + 5) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Κνη.α.ύξουσα} \\ 8x^2 + 5 > 1 \\ 2x^4 + 5 > 1 \end{matrix} 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow x^2(4 - x^2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

Δ3. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g''(x) = \frac{f''(x)(x-1) - (f'(x)-1)}{(x-1)^2} = \frac{f''(x)(x-1) - (f'(x)-f'(1))}{(x-1)^2}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[1, x]$, οπότε υπάρχει

$$x \in (1, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)f'(x) = f(x)-1$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)(x-1) - f''(x)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{f''(x) - f''(x)}{x-1}$$

Άρα

Έχουμε $1 < \xi < x$ και η f' γνησίως αύξουσα οπότε $f'(\xi) < f'(x)$.

Οπότε $g''(x) > 0, x \in (1, +\infty)$ και άρα η g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η σχέση που μας δίνεται γράφεται: $g(x) = g'(\alpha)(x-\alpha), x > 1$

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = g(x) - g'(a)(x - a)$, $x > 1$.

Είναι $h(a) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = g'(x) - g'(a)$

Έχουμε $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(a) \Leftrightarrow x = a$

Για $x < a$ είναι $g'(x) < g'(a) \Leftrightarrow h'(x) < 0$

Για $x > a$ είναι $g'(x) > g'(a) \Leftrightarrow h'(x) > 0$

Η h έχει ελάχιστο στο a με $h(a) = 0$. Οπότε το a μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. –
ΦΩΤΟΥ Φ.