

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα n_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα.

(μονάδες 2)

γ) Έστω μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$

(μονάδες 2)

δ) Το ενδεχόμενο $A-B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

(μονάδες 2)

ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ίσος με μέτρο διασποράς.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα $[10, 20)$ και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
$[10, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, 20)$					
Σύνολο					

Μονάδες 12

B2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\bar{x}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

B3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

(Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

$$P(\kappa) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}, \kappa \in \Omega, \quad \text{με } \alpha > 0$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω με

$$A = \{\kappa \in \Omega / \kappa^2 > 1\}$$

$$B = \{\kappa \in \Omega / (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0\}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{11}, P(B) = \frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : «να πραγματοποιείται το B και όχι το A »

Δ : «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B ».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \kappa \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{\kappa \in \Omega / \text{η συνάρτηση } f \text{ να είναι γνησίως αύξουσα}\}.$$

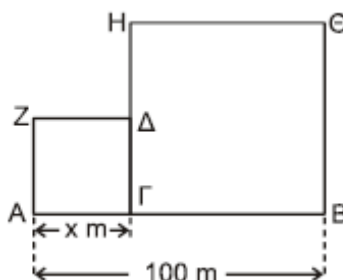
Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο E είναι βέβαιο.

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του AB τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος $A\Gamma$ να είναι x m.



Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $AGDZ$ και $GBTH$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x , είναι

$$E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, x \in (0, 100)$$

(μονάδες 3)

- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για $x=50$, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε n διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα l_i , $i=1, 2, \dots, n$ με αντίστοιχα μήκη x_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Αν η μέση τιμή των μηκών x_i , $i=1, 2, \dots, n$ είναι $\bar{x}=2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $S=0,2$ τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $n=25$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα l_i με αντίστοιχα μήκη x_i , όπου $i=1, 2, \dots, 25$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n}$$

Δίνεται ότι:

Μονάδες 6

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα l_i , $i=1, 2, \dots, 25$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Lambda = \{l_i, i=1, 2, \dots, 25 \text{ τέτοιο, ώστε ο δείκτης } i \text{ να είναι πολλαπλάσιο του } 3 \text{ ή πολλαπλάσιο του } 4\}$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 151

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 14

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 65

A4. α) Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Σωστό, **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

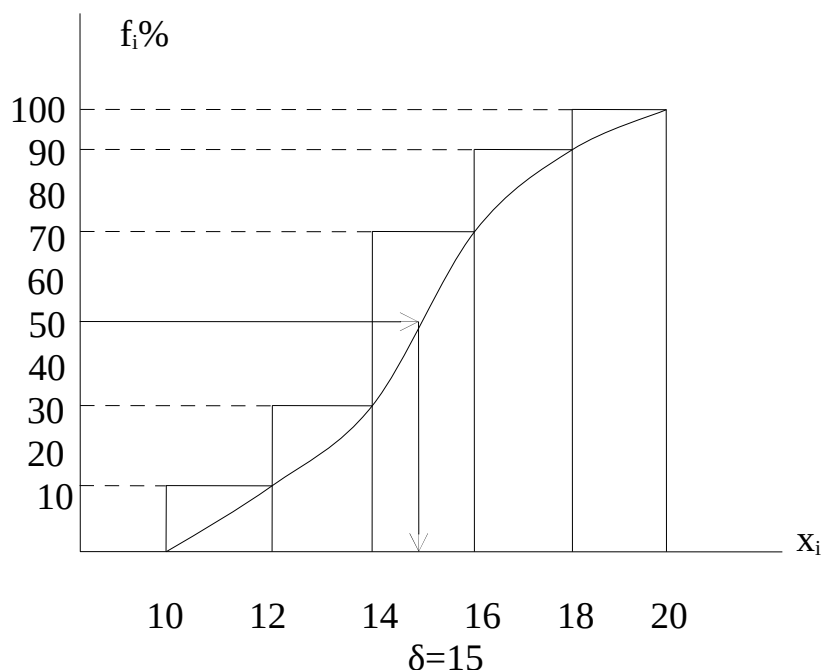
B1.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[10, 12)	11	6	10	6	10
[12, 14)	13	12	20	18	30
[14, 16)	15	24	40	42	70
[16, 18)	17	12	20	54	90
[18, 20)	19	6	10	60	100

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

Σύνολο		60	100		
--------	--	----	-----	--	--

B2. $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{900}{60} = 15$



B3. 19

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $p(-1) = \frac{\alpha}{2}$, $p(0) = \alpha$, $p(1) = \frac{\alpha}{2}$, $p(2) = \frac{\alpha}{5}$.

$p(-1) + p(0) + p(1) + p(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{10} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{11}$

Άρα $p(-1) = \frac{5}{22}$, $p(0) = \frac{5}{11}$, $p(1) = \frac{5}{22}$, $p(2) = \frac{1}{11}$

Γ2. $\kappa^2 > 1 \Leftrightarrow \kappa > 1$ ή $\kappa < -1$ άρα $A = \{2\}$

$P(A) = P(2) = \frac{1}{11}$

$(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$ ή $\kappa = \pm 2$ άρα $B = \{-1, 1, 2\}$

$P(B) = P(-1) + P(1) + P(2) = \frac{6}{11}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

$$A \cap B = \{2\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{11}$$

$$P(\Gamma) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$$

$$P(\Delta) = P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$\Gamma 3. \quad k'(x) = x^2 + \frac{9}{4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \Omega$$

$$\text{Πρέπει: } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq k \leq 3$$

$$\text{Άρα } E = \{-1, 0, 1, 2\} = \Omega$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ i) } E(x) = (A\Gamma\Delta Z) + (\Gamma B\Theta H) = x^2 + (100 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 200x + 10000, \quad x \in (0, 100)$$

$$\text{ii) } E'(x) = 4x - 200$$

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

$$E'(x) > 0 \hat{=} 50 < x < 100$$

$$E'(x) < 0 \hat{=} 0 < x < 50$$

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει ελάχιστο στο $x=50$

$$\Delta 2. \quad \frac{\sum x_i}{v} = \frac{\sum x_i}{x} \Leftrightarrow v = \frac{\sum x_i}{x} \Leftrightarrow v = 25$$

$$\Delta 3. \quad \text{Τα εμβαδά των τετραγώνων είναι } E_i = x_i^2 \text{ και η μέση τιμή τους: } \frac{\sum x_i^2}{v}$$

$$\text{Άρα } s^2 = \frac{\sum x_i^2}{v} - \frac{\bar{x}^2}{1} \Leftrightarrow \frac{\sum x_i^2}{v} = s^2 + \frac{\bar{x}^2}{1} \Leftrightarrow \frac{\sum x_i^2}{v} = 4,04 \text{ m}^2.$$

$$\Delta 4. \quad \Omega = \{1, 2, \dots, 25\} \quad N(\Omega) = 25$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

$\Lambda = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24\}$ $N(\Lambda) = 12$

$$P(\Lambda) = \frac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.