

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 8

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z}) - 4 - 2i = 0, z \in \mathbb{C}$$

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

B2. Αν $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3z_1 - z_2 - i$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, στον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ \alpha \cdot 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Δίνεται η συνάρτηση

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι $x=0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x-2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 251

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 273

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 150

A4.

α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i &= 0 \Leftrightarrow \\ (2x^2 + 2y^2 - 4) + (2x - 2)i &= 0 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + 2y^2 - 4 &= 0 \quad \text{και} \quad 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{και} \quad y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \end{aligned}$$

Άρα $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

$$w = 3 \frac{1+i}{1-i} = 3 \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = 3 \frac{2i}{2} = 3i = 3(i^4)^9 i^3 = -3i$$

B2.

$$\mathbf{B3.} \quad |u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

$$h(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0, x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

Γ2. Αφού $h'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε:} \quad e^{h(2h'(x))} &< \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \\ h(2h'(x)) &< \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow \\ h(2h'(x)) &< h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Γ3.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

όπου $u = \frac{e^x}{e^x + 1}$ και

Άρα η C_h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = \lim_{y \rightarrow 1} (-\ln y) = -\ln 1 = 0, \text{ όπου } y = e^x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$$

Άρα η C_h έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = x$

Γ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(h(x) + \ln 2) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = h(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0, 1]$

$$\text{Για κάθε } x \in [0, 1] \text{ έχουμε } h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq \ln 2 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 \geq 0$$

$$\text{και } e^x \geq 1, \text{ οπότε } e^x(h(x) + \ln 2) \geq 0 \text{ και άρα } j(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Επομένως

$$E = \int_0^1 j(x) dx = \int_0^1 e^x (e^x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) dx =$$

$$= \int_0^1 (xe^x - e^x \ln(e^x + 1) + e^x \ln 2) dx$$

$$= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx + \int_0^1 e^x \ln 2 dx =$$

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - [(e^x + 1)\ln(e^x + 1)]_0^1 + \int_0^1 e^x dx + \ln 2 [e^x]_0^1 =$$

$$[xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 - [(e^x + 1)\ln(e^x + 1)]_0^1 + [e^x]_0^1 + \ln 2 [e^x]_0^1 =$$

$$e - (e + 1)\ln(e + 1) + 2\ln 2 + (e - 1)\ln 2 = e + (e + 1)\ln \frac{2}{e + 1} \text{ tm}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 = f(0),$$

οπότε η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } h(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } h'(x) = xe^x$$

Για $x < 0$ είναι $h'(x) < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και άρα για $x < 0$ είναι $h(x) > h(0) = 0$.

Για $x > 0$ είναι $h'(x) > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και άρα για $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) = 0$.

Επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και αφού η f συνεχής στο 0, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

Δ2. α) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε
Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $G(x) = \int_1^{2f(x)} f(u) du, x \in \mathbb{R}$

Έχουμε $G(0) = \int_1^{2f(0)} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0$, οπότε η $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $G(x) = 0$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

✓ Για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, οπότε $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

✓ Για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, οπότε $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

✓ Για $x = 0$ είναι $f(0) = 1 > 0$.

Επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✓ Για $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) > 1$.

Άρα $\int_1^{2f(x)} f(u) du > 0 \Leftrightarrow G(x) > 0$.

✓ Για $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x) < 1$

Άρα $\int_{2f'(x)}^1 f(u)du > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{2f'(x)} f(u)du > 0 \Leftrightarrow G(x) < 0$

Επομένως η $x = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $G(x) = 0$

β) Είναι $y(t) = f(x(t))$, οπότε $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$, $t \geq 0$

Αν t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $x'(t_0) = 2y'(t_0)$ τότε έχουμε

$$x'(t_0) = 2f'(x(t_0))x'(t_0) \Leftrightarrow 2f'(x(t_0)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t_0)) = f'(0) \Leftrightarrow x(t_0) = 0$$

, οπότε

$$y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$$

Άρα το $M(0,1)$ είναι το ζητούμενο σημείο της καμπύλης

Δ3. Έχουμε $g(x) = (x^x + 1 - e)^2(x - 2)^2 = (e^x - e)^2(x - 2)^2, x \in (0, +\infty)$

$$g'(x) = 2(x - 2)(e^x - e)(x^x - e^x - e), x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x^x - e^x - e = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x) = x^x - e^x - e, x \in (0, +\infty)$

Επειδή $K'(x) = x^x > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty)$

Η K συνεχής στο $[1, 2]$ και ισχύει $K(1)K(2) = -e(e^2 - e) < 0$

Άρα σύμφωνα με το ΘΒ υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ ώστε $K(\rho) = 0$, το οποίο μοναδικό.

Για $0 < x < \rho$ είναι $K(x) < K(\rho) = 0$ και

για $x > \rho$ είναι $K(x) > K(\rho) = 0$

x	0	1	ρ	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	-	+
$e^x - e$	-	+	+	+	+
$K(x)$	-	-	+	+	+
$g'(x)$	-	+	-	-	+
$g(x)$	Γν.φθίνουσα	Γν. αύξουσα	Γν.φθίνουσα	Γν. αύξουσα	

τ.ελάχιστο

τ. μέγιστο

τ. ελάχιστο

Άρα η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ
«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. –
ΦΩΤΟΥ Φ.