

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

(μονάδες 2)

γ) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha = 0$

(μονάδες 2)

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

(μονάδες 2)

ε) $\int_{g(a)}^{g(x)} f(t) dt = f(g(x))g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z - i}{2z + i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$
- w φανταστικός

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ του κύκλου.

Μονάδες 10

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$

Μονάδες 8

B3. Αν είναι $z = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Δίνεται η συνάρτηση

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μονάδες 7

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$\xi'(\xi) = \int_2^\xi f(t) dt = \xi(\xi) \sqrt{f(\xi) - \xi(\xi)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f (μονάδες 3)

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

Μονάδες 7

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3)

Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

(μονάδες 3)

- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 263

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 192

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 303

A4. α) Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014

ΘΕΜΑ Β

$$w \in I \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z-i}{2z+i} = -\frac{\overline{2z-i}}{\overline{2z+i}} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{B1.} \quad \frac{2z-i}{2z+i} = -\frac{\bar{2z}+i}{2\bar{z}-i} \Leftrightarrow (2z-i)(\bar{2z}+i) = (2z+i)(2\bar{z}-i) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z\bar{z} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}$$

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και $\rho = \frac{1}{2}$.

Επειδή $z \neq \frac{i}{2}$ τότε το σημείο $\frac{i}{2}$ δεν ανήκει στον γ.τ..

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2z-i}{2z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |2z-i| = |2z+i| \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{B2.} \text{ Είναι } |2z-i|^2 = |2z+i|^2 \Leftrightarrow (2z-i)(\bar{2z}+i) = (2z+i)(\bar{2z}-i) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Επειδή $|z| = \frac{1}{2}$ τότε $z = \pm \frac{1}{2}$.

$\mathbf{B3.}$ Για $z = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$w = \frac{\frac{1}{2}-i}{\frac{1}{2}+i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{Άρα } w^4 + iw^7 = (-1)^4 + i(-i)^7 = i^4 - i^8 = 1 - 1 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = -\infty$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0 = f(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x=0$

Γ2. Η f είναι παραγ. στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

- $f'(x) > 0 \hat{=} e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \hat{=} 1 - \ln x > 0 \hat{=} \ln x < 1 \hat{=} x < e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$			

Έστω $A_1 = [0, e]$, f συνεχής και γν. αύξουσα στο A_1

Οπότε $f(A_1) = [f(0), f(e)] = [0, e]$

$A_2 = [e, +\infty)$, f συνεχής και γν. φθίνουσα στο A_2

Οπότε $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)]$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$

$f(A_2) = \{e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{4}}\}$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \{e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{4}}\}$
Άρα

Γ3. i) $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow 4 \ln x = x \ln 4 \Leftrightarrow$

$\ln x^4 = \ln 4^x \Leftrightarrow x^4 = 4^x$ (είναι e^x , $\ln x$ συναρτήσεις 1-1)

ii) $f(2) = f(4)$ αφού $2^4 = 4^2$ και

$f(4) = f(4)$ αφού $4^4 = 4^4$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ρίζες τις $x=2$, $x=4$

Η f είναι γν. αύξουσα στο A_1 οπότε $x=2$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(4)$.

Η f είναι γν. φθίνουσα στο A_2 οπότε $x=4$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(4)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες τις $x=2$, $x=4$.

$\xi'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt = \xi(\xi - \sqrt{2}) \Leftrightarrow$

Γ4. Είναι $\xi'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt = \xi(f(\xi) - \sqrt{2})$

Θεωρούμε $h(x) = (f(x) - \sqrt{2}) \int_2^x f(t) dt$

Η h είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με $h'(x) = f'(x) \int_2^x f(t) dt + (f(x) - \sqrt{2})f(x)$

$h(2) = (f(2) - \sqrt{2}) \int_2^2 f(t) dt = 0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

$$h(4) = (f(4) - \sqrt{2}) \int_2^4 f(t) dt = \left(\frac{e^{\ln 4}}{e^{\ln 2}} - \sqrt{2} \right) \int_2^4 f(t) dt = \left(\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}} - \sqrt{2} \right) \int_2^4 f(t) dt =$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \int_2^4 f(t) dt = 0$$

Οπότε $h(2) = h(4)$

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (2, 4): h'(\xi) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \xi'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt + \xi \left(\frac{1}{\xi} - \sqrt{2} \right) f(\xi) = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ οπότε παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση έχουμε

$$(e^{f(x)}) (f(x)^2 - 2f(x) + 3) + x^{f(x)} (2f'(x) - (f(x))^{-1}) = 0$$

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) - 2f(x) + 3) + e^{f(x)} (2f'(x)f(x) - f'(x)) = 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) - 2f(x) + 3 + 2f(x)) = 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) + 1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} (f^2(x) + 1)} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ και η δεδομένη σχέση γίνεται

$$e^y (y^2 - 2y + 3) = f^{-1}(y) \quad \text{οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R} \quad (\text{αφού } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$$

$$\Delta 2. (f^{-1})'(x) = (e^x) (x^2 - 2x + 3) + e^x (x^2 - 2x + 3)' = \dots = e^x (x^2 + 1)$$

$$(f^{-1})''(x) = (e^x) (x^2 + 1) + e^x (x^2 + 1)' = e^x (x^2 + 2x + 1) = e^x (x + 1)^2$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

$(f^{-1})'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ και $(f^{-1})'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ οπότε η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

$$f^{-1}(0) = e^0(0^2 - 2 \cdot 0 + 3) = 3$$

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $A(0, 3)$ είναι

$$y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0), (f^{-1})'(0) = 1 \quad \text{άρα}$$

$$y - 3 = x \Leftrightarrow y = x + 3$$

Αφού η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $C_{f^{-1}}$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } E &= \int_0^1 (f^{-1}(x) - (x+3)) dx = \\ &= \int_0^1 e^x (x^2 - 2x + 3) - (x+3) dx = \\ &= \int_0^1 e^x (x^2 - 2x + 3) dx - \int_0^1 (x+3) dx = \\ &= \int_0^1 (e^x)' (x^2 - 2x + 3) dx - \left[\frac{e^x}{2} + 3x \right]_0^1 = \\ &= \left[e^x (x^2 - 2x + 3) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x (2x - 2) dx - \frac{7}{2} = \\ &= 2e - 3 - \int_0^1 (e^x)' (2x - 2) dx - \frac{7}{2} = \\ &= 2e - 3 - \left[e^x (2x - 2) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx - \frac{7}{2} = \\ &= 2e - 3 - (+2) + 2 \left[e^x \right]_0^1 - \frac{7}{2} = \\ &= 2e - 3 - 2 + 2e - 2 - \frac{7}{2} = \\ &= 4e - \frac{21}{2} \quad \text{τ.μ.} \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2014**

Δ3. i) Ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ οπότε

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Άρα $\lambda_2 \cdot \lambda_1 = 1$

ii) $(AB) = \sqrt{(x - f^{-1}(x))^2 + (f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} =$

$$= \sqrt{2} |f^{-1}(x) - x| = d(x)$$

Έχουμε $f^{-1}(x) \geq x + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - x \geq 3$

Οπότε $\sqrt{2}(f^{-1}(x) - x) \geq 3\sqrt{2}$ άρα $d(x) \geq 3\sqrt{2}$

Οπότε $d(x)_{\min} = 3\sqrt{2}$ για $x = 0$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ «ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.