

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A .

ε) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B » δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω A , B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A , $A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της

$$\text{εξίσωσης } (3x-1) \cdot (8x^2-6x+1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$.

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

E : «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα I**, όπου $f_i\%$, $i=1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3^η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10$, $f_2\%=10$, $f_3\%=30$, $f_4\%=20$, $f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{66; 257}$

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα και v_1, v_2, v_3 και v_4 οι συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης}

κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$, να βρείτε το πλήθος n των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα n παρατηρήσεων.

Ορίζουμε ως α τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την

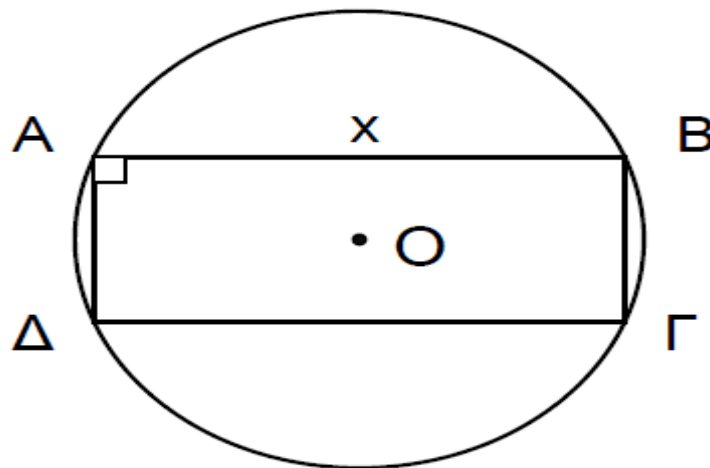
$$\beta_i = \frac{\alpha_i - \alpha}{S_\alpha}$$

τυπική τους απόκλιση. Εάν , για $i=1, 2, 3, 4, 5$ να δείξετε ότι

η μέση τιμή β του δείγματος $\beta_i, i=1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται ο κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho=5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB=x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα Ι.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A-B) > 0$, να

δείξετε ότι $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 31

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 22

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 87

A4. α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Λάθος, δ) Λάθος, ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β**B1.** Ισχύει

$$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B), \text{ τότε } P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

$$(3x - 1)(8x^2 - 6x + 1) = 0 \quad x = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } R(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad R(A) = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad R(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

B2. Ισχύει $R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A \cap B)$, άρα $R(B) = \frac{5}{12}$ επίσης

$$R(A - B) = R(A \cap B) = R(B) - R(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$R(D) = R[(A \cap B)] = 1 - R(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

B3. Αφού $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ τότε

$$R(E) = R[(A - B) \cup (B - A)] = R(A - B) + R(B - A) = R(A) + R(B) - 2R(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

B4. $9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{3}$ και αφού $0 \leq R(G) \leq 1$ τότε $R(G) = \frac{2}{3}$

Αν τα B και Γ ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε :

$$R(B \cup G) = R(B) + R(G) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \quad \text{Άτοπο. Άρα τα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $f_1\% = 10$, $f_5\% = 30$ και $f_3\% = \frac{108}{360} \cdot 100 = 30$

$$\text{Ισχύει } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1, \text{ οπότε } f_2 + f_4 = 0.3 \quad (1)$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 9 \frac{1}{10} + 11 f_2 + 13 \frac{3}{10} + 15 f_4 + 17 \frac{3}{10}$$

$$110 f_2 + 150 f_4 = 41 \quad (2). \text{ Από (1) και (2) έχουμε } f_2 = 0.1 \text{ και } f_4 = 0.2$$

$$\text{Άρα } f_2\% = 10 \text{ και } f_4\% = 20$$

Γ2.

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 x_i v_i \right)^2}{v} = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 x_i f_i \right)^2}{5} = 202.6 - 14^2 = 6.6$$

$$\text{Αρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.6} \approx 2.57$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2.57}{14} \approx 18.35\% > 10\%$$

, οπότε το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 v_5}{v} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 \frac{3}{10} v}{v}$$

Γ3.

Αρα

$$\frac{1780 + 17 \frac{3}{10} v}{v} = 14 \Leftrightarrow v = 200$$

$$b_i = \frac{a_i - \bar{a}}{s_a} = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$$

Γ4.

$$\text{Οπότε : } \bar{b} = \frac{1}{s_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0 \quad \text{και} \quad s_b = \frac{1}{s_a} s_a = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(BG)^2 = (AG)^2 - (AB)^2 = 100 - x^2 \text{ αρα}$$

$$(BG) = \sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$$

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδον $f(x) = (AB)(BG) = x\sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, 0 < x < 10$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
f'(x)		+	-
f(x)		M	

$$\text{Εχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5\sqrt{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} < x < 10$$



Άρα στο $x_0 = 5\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο, οπότε για $x = 5\sqrt{2}$ το εμβαδόν του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο.

Επειδή $(B\Gamma) = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = (AB)$, το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο

Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} =$$

$$\frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

Αφού $(A - B) \subseteq A$ τότε $0 < P(A - B) \leq P(A) \leq 1$ και αφού f γνησίως αυξουσα στο

$(0, 5\sqrt{2})$ τότε

$$f(P(A - B)) \leq f(P(A))$$

$$\Leftrightarrow P(A - B) \sqrt{100 - P^2(A - B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow 0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} < 1$$

$$f\left(\frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}}\right)$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. – ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. –

ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

