

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

Μονάδες 7

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$$

B2. Έστω $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \leq w \leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

B3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 , με $z_3 = 2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται η συνάρτηση

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) e^{f(x)} + e^{-f(x)} = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt}}{e^{\frac{1}{2} \ln |f(x)|}} - \frac{1}{2} \ln |f(x)| \right).$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 194.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 188.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 259.

A4. α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Λάθος, δ) Σωστό, ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } |z-4| &= 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow \\ z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 16 &= 4z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 4 \Leftrightarrow \\ 3z\bar{z} &= 12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{aligned}$$

Άρα ο γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

$$\begin{aligned} w &= \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \\ \text{B2. α)} \quad |z_1| &= 2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1} \quad \text{και} \quad |z_2| = 2 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{4}{z_2} \\ \text{Έχουμε} \quad \bar{w} &= \frac{\bar{2z_1}}{\bar{z_2}} + \frac{\bar{2z_2}}{\bar{z_1}} = 2 \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} + 2 \frac{\bar{z_2}}{\bar{z_1}} = \\ &= 2 \frac{z_1}{z_2} + 2 \frac{z_2}{z_1} = w \end{aligned}$$

Είναι

$$2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = w \quad . \text{ Άρα } w \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{β)} \text{ Έχουμε } w &= \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}, \quad \text{οπότε} \quad |w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \frac{|z_2|}{|z_1|} = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{2} = 4 \Leftrightarrow |w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4 \end{aligned}$$

$$w = -4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4$$

B3.

$$\begin{aligned} 2z_1^2 + 2z_2^2 &= -4z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ z_1 + z_2 &= 0 \Leftrightarrow \boxed{z_1 = -z_2} \end{aligned}$$

$$\bullet (A\Gamma) = |z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |-1 + 2i| \cdot |z_1| = 2\sqrt{5}$$

$$\bullet (B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |2iz_1 - z_2| = |1 + 2i| |z_1| = 2\sqrt{5}$$

Επειδή $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 1)' - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x=1$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το διάστημα } f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow$$

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3 \cdot (x^2 + 1)}{e^x} = 2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2 + 1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{e^3}{2} \quad (1).$$

$$\frac{e^3}{2} \in f(\mathbb{R})$$

Επειδή και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Γ3. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, τότε $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } \int_{2x}^{4x} f(t) dt = F(4x) - F(2x) \quad (1).$$

Η F είναι συνεχής στο $[2x, 4x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x, 4x)$ με $x > 0$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} = \frac{F(4x) - F(2x)}{2x}.$$

$$\text{Οπότε } F(4x) - F(2x) = 2xf(\xi) \quad (2).$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt = 2xf(\xi).$$

Επειδή $0 < 2x < \xi < 4x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f(\xi) < f(4x)$ ή $2xf(\xi) < 2xf(4x)$.

$$\text{Άρα } \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$$

$$g(x) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{\int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt}{x}$$

Γ4. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

• Αφού η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ τότε η συνάρτηση $\int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

• Η $g_1(x) = \int_1^{4x} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x f(t) dt$ και $4x$.

• Η $g_2(x) = \int_1^{2x} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x f(t) dt$ και $2x$.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η g είναι και συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$g'(x) = \frac{\int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt}{x} = \frac{(4f(4x) - 2f(2x))x - \int_1^{4x} f(t) dt + \int_1^{2x} f(t) dt}{x^2} = \frac{2xf(4x) - f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

• Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ από το Γ3 ισχύει $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0$

• Επειδή $0 < 2x < 4x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f(2x) < f(4x)$ ὅ

$$f(4x) - f(2x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$2xf(4x) - f(2x) > 0$$

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2xf(4x) - f(2x)}{1} = 2f(0) - f(0) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2xf(4x) - f(2x)}{1} = 2f(0) - f(0) = 2 - 1 = 1 = g(0)$$

αφού f συνεχής στο $x_0=0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(4x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) = 1$$

Επομένως η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ τότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)e^{f(x)} + e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

Για $x=0$ από (1) προκύπτει:

$$e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1$$

$$\text{Θέτουμε } \varphi(x) = e^{f(x)} - x, x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } \varphi^2(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

$$\text{Αφού } \varphi(0) = e^{f(0)} = e^0 = 1 > 0$$

$$\text{Τότε } \varphi(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } \varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επειδή για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0.$$

$$\text{Τότε } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1}) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \hat{=} x < 0$$

$$f'(x) < 0 \hat{=} x > 0$$

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ με $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.

- Η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$.

Το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της C_f αφού η f'' μηδενίζεται στο $x_0=0$ και εκατέρωθεν αυτό αλλάζει πρόσημο.

β) Η εφαπτομένη ε της C_f στη σημείο της $O(0, 0)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ τότε $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$).

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^1 [x - f(x)] dx =$$

$$\int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx =$$

$$\frac{1}{2} - \left[x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\frac{1}{2} - \ln(\sqrt{2}+1) + \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} - \ln(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{2}+1) \quad \tau./\mu.$$

Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^2(x) = f^2(0) = 0$$

• Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε

$$h(x) = \int_0^x f^2(t) dt$$

• Αφού η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

είναι

Επειδή η h συνεχής στο 0 τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f^2(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \int_0^0 f^2(t) dt = 0$

• Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Οπότε $|f(x)| = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f^2(t) dt}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} \cdot f(x) \ln f(x) = 0$$

Έχουμε

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f^2(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} e^{h(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f(x)} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln f(x))'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-f(x)) = 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$)

Δ4. Για κάθε $x \in (2, 3)$ έχουμε

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right), \quad x \in [2, 3]$$

• Οι συναρτήσεις $x-2$ και $x-3$ είναι συνεχείς στο $[2, 3]$ ως πολυωνυμικές

• Οι συναρτήσεις $f(t)$ και t^2 είναι συνεχείς στο $[2, 3]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση $\int_0^x f(t^2) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ και επειδή η συνάρτηση $x-2$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ τότε η συνάρτηση $\int_0^{x-2} f(t^2) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και άρα είναι συνεχής στο $[2, 3]$.

• Η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$ οπότε η συνάρτηση $\int_0^x f^2(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ και άρα είναι συνεχής στο $[2, 3]$. Επομένως η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων

$$g(2) = \int_0^2 f^2(t) dt - 8$$

$$g(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) \geq f(0)$, $x \in [0, +\infty)$. Οπότε $f(x) \geq 0$, $x \in [0, +\infty)$

Ισχύει $0 \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)

• Η συνάρτηση $K(t) = t^2 - f^2(t)$, $t \in [0, 2]$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ με $K(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 2]$ και η K δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 2]$

$$\text{Άρα } \int_0^2 K(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (t^2 - f^2(t)) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 t^2 dt - \int_0^2 f^2(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3} - \int_0^2 f^2(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3} - \int_0^2 f^2(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0 \hat{=} g(2) < 0$$

• Η συνάρτηση $H(t) = t^2 - f(t^2)$ $t \in [0, 1]$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $H(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [0, 1]$ και η H δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 1]$, άρα

$$\int_0^1 H(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (t^2 - f(t^2)) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} - \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0$$

Επομένως $g(2) \cdot g(3) < 0$, οπότε σύμφωνα με το $g(3) > 0$ θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. –
ΦΩΤΟΥ Φ.