

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε το $\int_a^b f(t) dt = G(a) - G(b)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν η f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$$\bullet \int_0^p (f(x) + f''(x)) \ln x \, dx = p$$

$$\bullet f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$$

$$\bullet e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

$$\Delta 3. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \sin x}{f(x)}.$$

Μονάδες 6

$$\Delta 4. \text{ Να δείξετε ότι } 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2.$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 262.

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 141.

A3. Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελίδα 246.

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f'(x) = \dots = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

Το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f			
O.E.			

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο $x=0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=0$.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \dots = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}$.

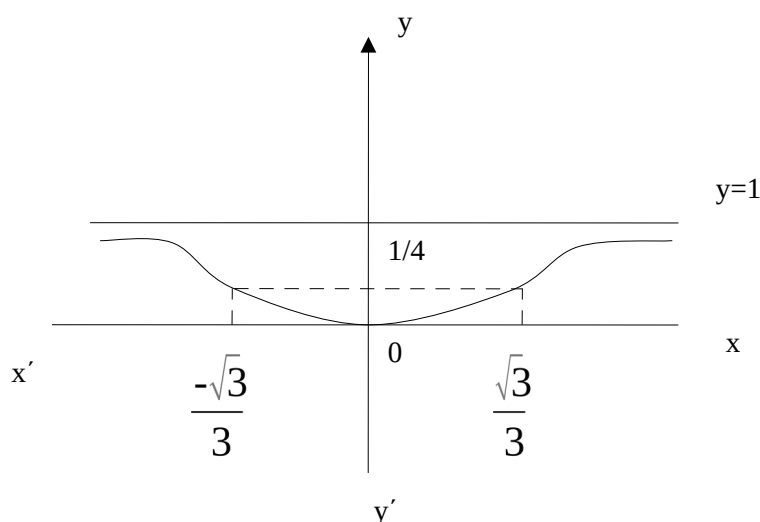
Το πρόσημο της f'' και τα διαστήματα κυρτότητας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	-		+	-
f				
		Σ.Κ	Σ.Κ	

Η f είναι κυρτή στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$. Τα σημεία $A_{\Sigma}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B_{\Sigma}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f .

B3. Επειδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ τότε η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Επίσης η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B4.



Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα στο $x_0 = 0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$.

Επομένως $g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

$$\text{Έχουμε } e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Γ2. Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| \quad \text{και}$$

$$\text{αφού } e^{x^2} - x^2 - 1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^* \text{ τότε } |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

- Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

- Αν $f(x) > 0$, $x \in (-\infty, 0)$ τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

- Αν $f(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0)$ τότε $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

- Αν $f(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

- Αν $f(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$ τότε $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R} \text{ ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x > 0 \end{cases} \text{ ή } f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Γ3. Έχουμε } f'(x) = 2x e^{x^2} - 2x, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ ισχύουν } e^{x^2} - 1 > 0 \text{ και } x^2 \cdot e^{x^2} > 0$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ τότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = f'(x+3) - f'(x), x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αφού $x+3 > x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x+3) > f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η h είναι 1-1.

$$\text{Για κάθε } x \in [0, +\infty) \text{ έχουμε } f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow x = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\text{Δ1. Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1.$$

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$ για x κοντά στο 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ και $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ για x κοντά στο 0 .

Άρα $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot h'(x)) = 1 \cdot 0 = 0$ αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε $\int_0^p f'(x) + f''(x) h(x) dx = p \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(p) + f(0) = p$ οπότε $f(p) = p$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot h(x)}{x} = 1$$

Δ2. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχουμε $(e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$,
 $x \in \mathbb{R}$ (1)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x = x_0$. Από θ. Fermat έχουμε $f'(x_0) = 0$. Οπότε η σχέση (1) για $x = x_0$ γίνεται $e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ δηλαδή $f'(0) = 0$ ΑΤΟΠΟ αφού $f'(0) = 1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ και

$$\left| \frac{h(x) + s \cdot u(x)}{f(x)} \right| = \frac{|h(x) + s \cdot u(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{|h(x)| + |s \cdot u(x)|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

$$\text{Άρα } -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{h(x) + s \cdot u(x)}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)} \text{ και αφού}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \sin x}{f(x)} = 0$
 προκύπτει ότι

Δ4. Θέτουμε $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Για $x=1$: $u = \ln 1 = 0$

Για $x=e^\pi$: $u = \ln e^\pi = \pi$

$$\text{Άρα } \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$ οπότε για κάθε $u \in [0, \pi]$ ισχύει ότι $f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi \Leftrightarrow f(u) \geq 0$ και $\pi - f(u) \geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

$$\text{Άρα } \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και} \quad \int_0^\pi (\pi - f(u)) du > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και}$$

$$\left[\pi x \right]_0^\pi - \int_0^\pi f(u) du > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du > 0 \quad \text{και}$$

$$\int_0^\pi f(u) du < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$$

$$\text{Επομένως } 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ
 ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

**ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. –
ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.**