

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντιστροφή;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.**Μονάδες 4****A3.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο X του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .**Μονάδες 5****A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.****α)** Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος)

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος)

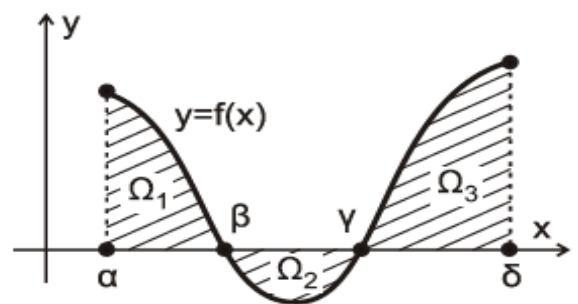
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8**A5.** Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 , Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$, τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx$

είναι ίσο με :

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ Β**Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην ευθεία $y = 2$.**B1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$ **Μονάδες 3**

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x & , x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Δ

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΜΟΚ$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\epsilon): y = -x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ϵ) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 15

β) i, ii Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A4. α) Η πρόταση είναι Λάθος: Αντιπαράδειγμα σχολικό βιβλίο σελίδα 134

β) Η πρόταση είναι Λάθος: Αντιπαράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 4x + 3}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = 1 - 3 = -2$$

αλλά $f(1) = 2$

A5. Σωστό είναι το γ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \frac{x \rightarrow +\infty}{e^x} = 0$$

οπότε $\lambda = 2$

B2. Για $\lambda = 2$ είναι $f(x) = e^{-x} + 2$

Θεωρούμε $g(x) = f(x) - x$

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο $[2, 3]$

Η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1 - e^3}{3} < 0$$

οπότε $g(2) \cdot g(3) < 0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$: $g(x_0) = 0$ ή $f(x_0) - x_0 = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ οπότε η g είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

B3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$ οπότε f είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

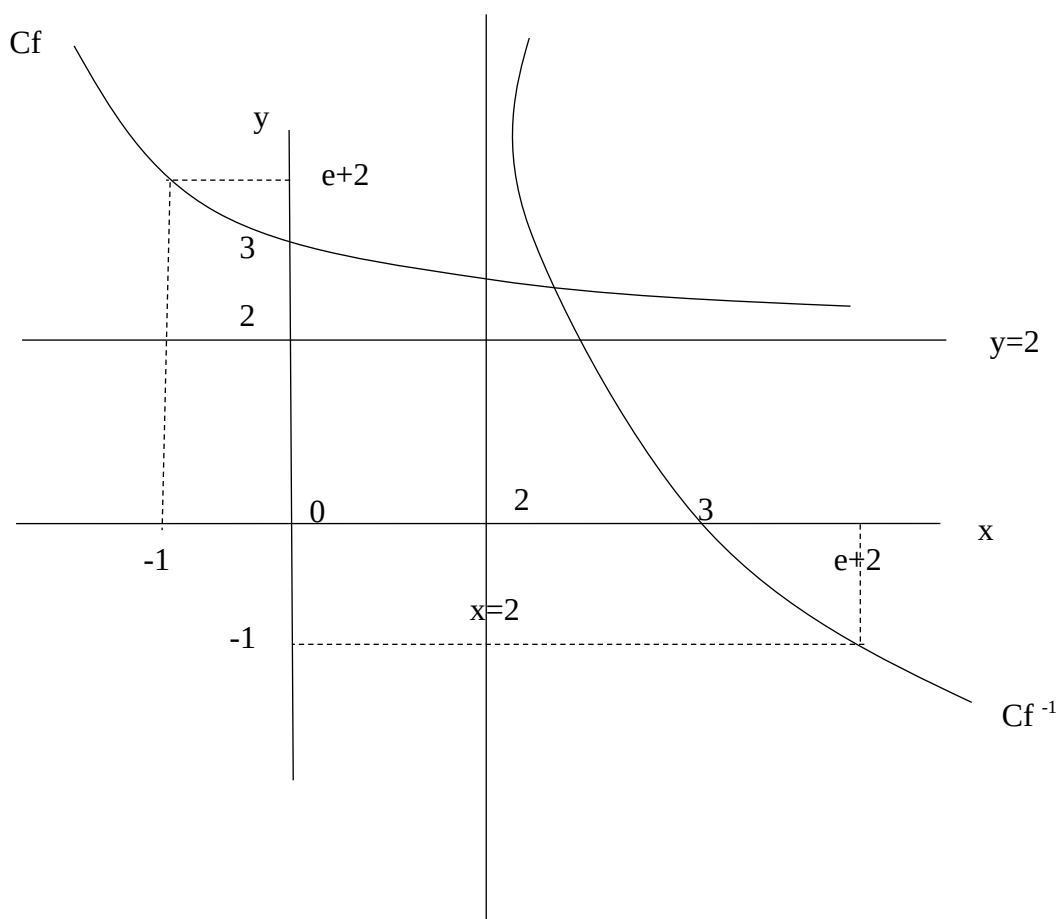
Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \stackrel{y > 2}{\Leftrightarrow} -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$, $x > 2$.

B4. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = +\infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = \lim_{x - 2 = u} \ln(u) = -\infty$

Άρα η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf^{-1} .



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1.

Αφού η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής στο $x_0=1$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$1+\alpha=1+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha=\beta} \quad (1)$$

Επίσης $f(1)=1+\alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1} \stackrel{\alpha=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1}+\beta}{1} = 1+\beta$$

$$\text{Άρα } 1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1, (1) \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Γ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \\ e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}$$

Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ e^{x-1}+1, & x < 1 \end{cases}$$

Άρα $f'(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}$ άρα η f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Γ3. i) Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $\Delta = (-\infty, 0)$ οπότε

$$f(\Delta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right)$$

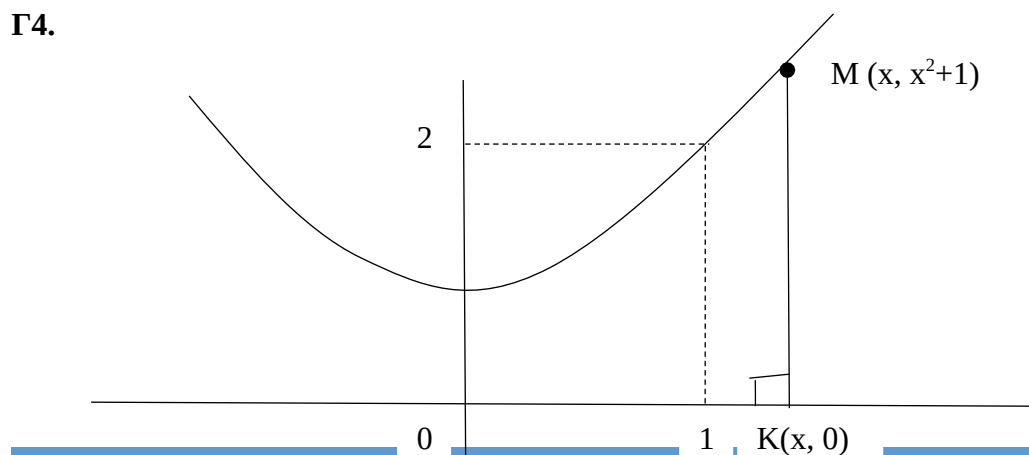
Ο αριθμός $0 \in f((-\infty, 0))$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 0)$ και αφού η f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ η ρίζα είναι μοναδική άρα η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια αρνητική ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

ii) Αφού f γν. αύξουσα τότε για κάθε $x > x_0$ ισχύει $f(x) > f(x_0)=0$

άρα $f^2(x) > 0$ και $-x_0 f(x) > 0$, οπότε $f^2(x) - x_0 f(x) > 0$

άρα η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4.



Την $t=t_0$ είναι $x(t_0)=3$ μον. και $x'(t_0)=2$ μον./sec

$$E = \frac{\beta \cdot v}{2} = \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{2} = \frac{x^3 + x}{2}$$

Άρα $E = E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$

$$E'(t) = \frac{1}{2} (3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t))$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (3 \cdot 9 \cdot 2 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2(27 + 1) = 28 \text{ τ.μ/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha \\ &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha \end{aligned}$$

Επειδή η ευθεία (ε): $y = -x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$ τότε $f(1)=1$ και $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$ και $\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Δ2. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ είναι $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε $f(x) - (-x + 2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 - (-x + 2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Αφού $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$, $x \in [1, 2]$ οπότε $\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$

Άρα

$$E(\Omega) = \int_1^2 (f(x) - (-x + 2)) dx = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

Θέτουμε $u = x^2 - 2x + 2$

$$du = 2(x-1)dx$$

Για $x=1$: $u=1$

Για $x=2$: $u=2$

Άρα

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot (\ln u)' du = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{2} \int_1^2 1 du = \ln 2 - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \tau. \mu. \end{aligned}$$

Δ3. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = \\ &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{(x^2 - 2x + 2) - 2}{x^2 - 2x + 2} = \\ &= \ln(x^2 - 2x + 2) + 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

Αφού $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ (1) και

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 - 2x + 2} \geq -2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \geq -1 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda &\geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda &\geq [f(\lambda) + \lambda - 2] + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \lambda + 1/2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\lambda, \lambda + 1/2)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\lambda, \lambda + 1/2)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Αφού $f'(x) \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} f'(\xi) &\geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1$

Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο της $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $(x_2, g(x_2))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Οι C_f , C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν οι ευθείες ε_1 , ε_2 ταυτίζονται δηλαδή αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Έχουμε } f'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= -3x_2^2 - 1 \Leftrightarrow \\ f'(x_1) + 1 + 3x_2^2 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Αφού

$$f'(x_1) + 1 \geq 0 \quad \text{και} \quad 3x_2^2 \geq 0$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow f'(x_1) + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 3x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x_1) = -1 \quad \text{και} \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Αφού $f'(x) \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$) τότε $x_1=1$

Οι τιμές $x_1=1$ και $x_2=0$ επαληθεύουν την (3).

Άρα $x_1=1$, $x_2=0$ η μοναδική λύση του συστήματος.

Οπότε $A(1, 1) \in C_f$ και $B(0, 2) \in C_g$

Άρα η ευθεία (ε): $y = -x + 2$ είναι η εξίσωση της μοναδικής κοινής εφαπτομένης.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β.
– ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.

www.floropoulos.gr