

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

Η συνάρτηση K είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

$$K(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$$

$$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

Οπότε $f(1)f(e) < 0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$.

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $K'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, οπότε η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $K(x) = 0$

$$\ln x = \frac{1}{x}$$

δηλαδή της εξίσωσης

Δ2.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Έχουμε

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} > 0 \xrightarrow{x_0 > 0} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} < 0 \xrightarrow{x_0 > 0} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	x_0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

min

Άρα η f στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το

$$f(x_0) = \ln x_0 - (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g και C_h είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \quad (1)$$

- Για $x \leq 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Για $x > 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x - \ln e^{-x} = (x+1) \ln \frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x + x = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x + x = (x+1)(\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x + x = (x+1)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned}$$

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$

Άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

Επομένως το σημείο με τετμημένη x_0 είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_g και C_h .

$$g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \quad (2)$$

Οπότε

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \left(\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e}$

Έχουμε $g'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$ και $h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln \frac{x_0}{e} \stackrel{(2)}{=} \frac{x_0}{e^{x_0}} (\ln x_0 - \ln e)$

$$= \frac{x_0}{e^{x_0}} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \cdot \frac{1-x_0}{x_0} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Οπότε $g'(x_0) = h'(x_0)$

Άρα στο μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0 οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4.

Η απόσταση των σημείων $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$ είναι

$$d(x) = \|f(x) - \varphi(x)\| = |f(x) - \varphi(x)|, \quad x \in [a, b]$$

(αφού $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$)

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .
- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

Η συνάρτηση d στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ελάχιστο σ' αυτό, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .