

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 135
A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 51
A3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 23
A4. α. Σ
 β. Λ
 γ. Σ
 δ. Σ
 ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ με $u \in \mathbb{R}$

Οπότε $f(u) = ue^{-(u-1)} = ue^{-u+1} = ue^{1-u}$

Οπότε $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

- Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		M	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=1$

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) =$

$$e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}(1-x+1) = -e^{1-x}(2-x) = e^{1-x}(x-2)$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		ΣΚ	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$

Το σημείο $A(2, f(2))$, δηλαδή $A(2, \frac{2}{e})$ είναι ΣΚ

Για τις ασύμπτωτες:

Για $x \rightarrow -\infty$ ($y = \lambda x + \beta$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε $1-x=u$

$$\text{Για } x \rightarrow -\infty \text{ είναι } u \rightarrow +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$

Για $x \rightarrow +\infty$ ($y = \lambda x + \beta$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε $1-x=u$

Για $x \rightarrow +\infty$ είναι $u \rightarrow -\infty$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα $y=0$, οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B4. i. $A_1 = (-\infty, 1]$, $f \uparrow$ οπότε

$$F(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{1-x}) = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

$$f(1)=1$$

$A_2 = (1, +\infty)$, $f \downarrow$ οπότε

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = (0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \text{ (αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ άρα και στο } x=1)$$

$$\text{Άρα, } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1].$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ii. Για $\lambda > 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Για $\lambda = 0$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Για $0 < \lambda < 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο λύσεις μια στο $(0, 1)$ και μια στο $(1, +\infty)$.

Για $\lambda < 0$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια λύση στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f έχει τύπο $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο διάστημα $(0, \frac{3\pi}{2}]$ η f έχει τύπο $f(x) = \sin x$ και είναι συνεχής.
- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

- Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} \\ &= \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \alpha x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ έχουμε:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x - 1}{x}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. i.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$.
 - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x$
 - $\left. \begin{array}{l} f(0)=0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{array} \right\}$ οπότε $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
- ii. Με $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε: $f'(x) = 0 \iff -\eta\mu x = 0 \iff \eta\mu x = 0 \iff x = \pi$

Άρα $\xi = \pi$ το μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0, \frac{3\pi}{2})$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$

Γ3. Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Έχουμε: $f'(x) = (ax^3 - 3x^2 - x + 1)' = 3ax^2 - 6x - 1$

Το τριώνυμο $3ax^2 - 6x - 1$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 36 + 12a = 12(a + 3) < 0, \text{ αφού } a < -3$$

Επειδή $3a < -9 < 0$ θα ισχύει ότι $3ax^2 - 6x - 1 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Άρα, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, όποτε δεν υπάρχουν σημεία της C_f με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

$$\bullet f'(x) < 0$$

Γ4. Έχουμε για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

- Για $0 < x < \pi$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x < 0$.
- Για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$3\pi/2$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$			-1 min	

- Αφού $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, \pi)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \pi]$.
- Άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Άρα στο $x_0=\pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi)=\sin\pi = -1$.

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$.

Η συνάρτηση K είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $\frac{1}{x}$

$$K(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$$

$$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

Οπότε $f(1)f(e) < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$.

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $K'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, οπότε η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$K(x) = 0$ δηλαδή της εξίσωσης $\ln x = \frac{1}{x}$

Δ2.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} > 0 \xLeftrightarrow{x, x_0 > 0} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} < 0 \xLeftrightarrow{x, x_0 > 0} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

min

Άρα η f στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

$$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 =$$

$$x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_g και C_h είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \quad (1)$$

- Για $x \leq 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Για $x > 0$ έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \ln \frac{x_0}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$

$$\text{Άρα } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

Επομένως το σημείο με τετμημένη x_0 είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_g και C_h .

$$\text{Οπότε } g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \quad (2)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \left(\left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \right)' = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e}$

Έχουμε $g'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$ και $h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x_0+1} \ln \frac{x_0}{e} \stackrel{(2)}{=} \frac{x_0}{e^{x_0}} (\ln x_0 - \ln e)$

$$= \frac{x_0}{e^{x_0}} \left(\frac{1}{x_0} - 1 \right) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \cdot \frac{1-x_0}{x_0} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Οπότε $g'(x_0) = h'(x_0)$

Άρα στο μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0 οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4.

Η απόσταση των σημείων $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$ είναι
 $d(x) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty)$

(αφού $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$)

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .
- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,
με $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

Η συνάρτηση d στο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ελάχιστο σ' αυτό, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

**ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ
«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.**