

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η f έχει τύπο $f(x)=\alpha x^3-3x^2-x+1$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο διάστημα $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$ η f έχει τύπο $f(x)=\sin x$ και είναι συνεχής.
- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$f(0)=1=$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, τότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Αρα η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

- Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} \\ &= \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \alpha x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x - 1}{x}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

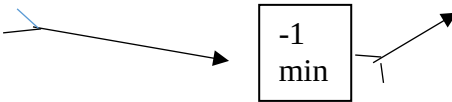
Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ4. Έχουμε για κάθε $x_0 = (-\infty, 0)$.

Για $0 < x < \pi$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x < 0$.

Για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x > 0$.

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$3\pi/2$
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$				

Αφού $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, \pi)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \pi]$.

Άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Άρα στο $x_0 = \pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$.

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.