

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Α4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η fog πρέπει $(x \in [0, +\infty) \text{ και } \sqrt{x} \in (-\infty, 1]) \Leftrightarrow (x \in [0, +\infty) \text{ και } \sqrt{x} \leq 1) \Leftrightarrow (x \in [0, +\infty) \text{ και } x \leq 1) \Leftrightarrow x \in [0, 1]$. Οπότε $h(x) = (fog)(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$.

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ έχουμε $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Rightarrow |x_1-1| = |x_2-1| \Rightarrow -x_1+1 = -x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Οπότε η h είναι "1-1" και αντιστρέφεται.

Λύνουμε την εξίσωση $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \geq 0 \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{y} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$.

Επειδή $x \in [0, 1]$ τότε $1 - \sqrt{y} \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$. Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

B3. i) Θεωρούμε

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Επίσης $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\varphi(0) \neq \varphi(1)$. Άρα ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$.

ii) Επειδή $0 < \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ έχουμε $\eta \frac{\pi}{6} < \eta \alpha < \eta \frac{\pi}{2}$ δηλαδή $\frac{1}{2} < \eta \alpha < 1$. Η φ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta \alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x < -1$ έχουμε

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = -2x + c_1$.

Για κάθε $x > -1$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$

Άρα υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = x^3 - x + c_2$ και επειδή $f(0) = 0$, τότε $c_2 = 0$.

Επομένως $f(x) = x^3 - x$, $x > -1$.

Αφού η f είναι συνεχής στο -1 ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ έχει εξίσωση

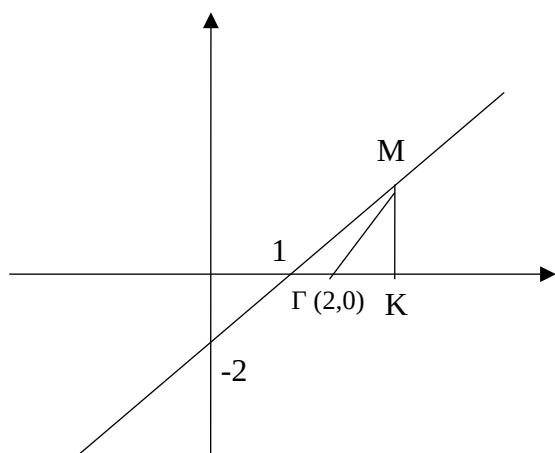
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$$

Η ε διέρχεται από το σημείο $M(0, -2)$ αν και μόνο αν

$$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) \Leftrightarrow -x_0^3 + x_0 - 2 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα $A(1, 0)$ και η ε έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Γ3.



Έστω $x = x(t)$ και $y = y(t)$ οι συντεταγμένες του M κάθε χρονική στιγμή t , με $t \geq 0$ και $x(t) > 2$. Έχουμε $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2$ μον/s

Το τρίγωνο MKG έχει εμβαδόν:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}(KG) \cdot (MK) = \frac{1}{2}(x(t)-2) \cdot y(t) \\ &= \frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2) \\ &= (x(t)-2)(x(t)-1) \\ &= x^2(t) - 3x(t) + 2 \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$$

$$= x'(t)(2x(t)-3)$$

$$\text{Άρα } E'(t_0) = x'(t_0)(2x(t_0)-3) = 2 \cdot (2 \cdot 3 - 3) = 6 \text{ τ.μ/s.}$$

Γ4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x-2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \end{aligned}$$

Θέτουμε $f(x)=u$, οπότε

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta \mu f(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu u}{u} = 0$$

Αφού για $u \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\left| \frac{\eta \mu u}{u} \right| = \frac{|\eta \mu u|}{|u|} \leq \frac{1}{u}$$

Άρα $-\frac{1}{u} \leq \frac{\eta \mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$ και επειδή

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u} \right) = \frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} 1}{u} = 0$$

Από το κριτήριο παραβολής προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} \eta \mu u}{u} &= 0 \\ \frac{\lim_{u \rightarrow -\infty} f(-x) - x}{1-x^3} &= y \\ &= \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 - y}{y^3 + 1} = \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} y^3}{y^3} = 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = (x - \ln(3x))' = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x		0		1	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$			↘		↗

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \text{ (αφού } e < 3 \text{ τότε } 1 < \ln 3)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(3x)) = +\infty$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(3x) = \lim_{3x=u} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x)}{x} = \frac{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 3x)'}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)'} = D.L.H.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = 1$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 1]$, οπότε $f(A_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)) = [1 - \ln 3, +\infty)$ και αφού $0 \in f(A_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$, οπότε $f(A_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [1 - \ln 3, +\infty)$ και αφού $0 \in f(A_2)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 στο $(0, +\infty)$ με $x_1 < 1 < x_2$

Η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) και αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2) .

Επειδή $x_1 < 1 < x_2$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Είναι $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega) = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x - \ln(3x)) dx = - \int_{x_1}^{x_2} x dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx$$

$$= - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + \left[x \ln(3x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot (\ln 3x)' dx = \\
 &= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} dx \\
 &= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - (x_2 - x_1) = \\
 &= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) = \\
 &= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1) = \frac{(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)
 \end{aligned}$$

Δ3. Έχουμε $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ (1)

$$E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0 \wedge x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει:

$1 < 2 - x_1 < x_2$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, τότε ισχύει:

$$f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0.$$

Δ4. Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ ισχύει: $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Για $x = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ με $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow 2f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$ αφού $f(x) - f(1) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για

$x = 1$ και $f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$ και είναι $x_2 > 1$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΜΠΑΚΑΣ Ν. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. –
ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr