

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της $f = g \circ h$ είναι

$$A = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

και ο τύπος

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2. i) Η $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{x^2} < 0$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) Επειδή

$$\pi > e \underset{\Rightarrow}{f} \downarrow \underset{\Rightarrow}{f}(\pi) < \underset{\Rightarrow}{f}(e) \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Rightarrow e(4 - \pi^2) < \pi(4 - e^2) \underset{\Rightarrow}{4 - e^2} < 0$$

$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

Β3. Για $x \rightarrow +\infty$ είναι

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - x^2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2} = -1 = \lambda$$

$$\kappa\alpha\iota \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - x^2 + x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα $y = -x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - x^2}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4 - x^2) \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

$$\alpha\phi\omicron\upsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - x^2) = 4 > 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = +\infty.$$

Άρα $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

B4. Για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$\left| \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \right| = \frac{|\sin(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\omicron\pi\omicron\tau\epsilon \quad \frac{-1}{|f(x)|} \leq \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

$$\text{Επειδή} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - x^2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\text{Τότε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|f(x)|} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|} = 0$$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + \alpha \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \alpha \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9}{2} \alpha - (2 + 2\alpha) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{9}{2}\alpha - 2 - 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\alpha - 2\alpha = 1 + 2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2. i)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2}{x - 1} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x}}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$ και επομένως ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ τότε

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(1) = -1 \text{ και επομένως } \omega = \frac{3\pi}{4}.$$

Γ3. Για $x < 1$: $f'(x) = (x^2 - 3x + 3)' = 2x - 3 < 0$

$$\text{Για } x > 1: f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ είναι και συνεχής σ' αυτό και αφού

$f'(x) < 0$, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι ''1-1''.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της είναι το

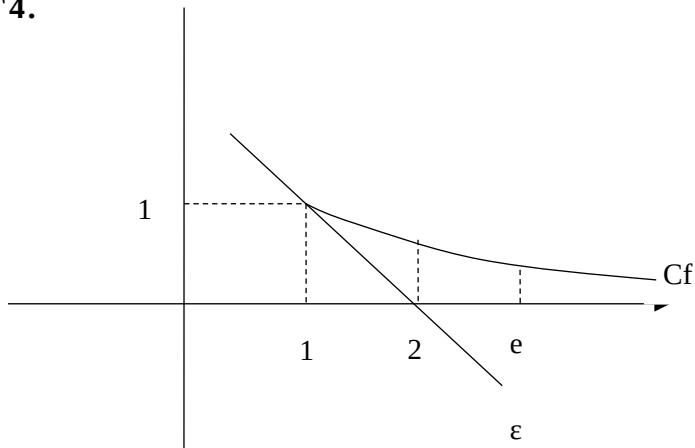
$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{x} = 0$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Γ4.



Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη Cf , την ευθεία ε και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2).$$

Όπου Ω_1 το χωρίο που περικλείεται από την Cf , την ευθεία ε και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ και Ω_2 το χωρίο που περικλείεται από τη Cf , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

$$\begin{aligned} \blacksquare E(\Omega_1) &= \int_1^2 (f(x) - (-x+2)) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx \\ &= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = (\ln 2 - 2) - \left(\ln 1 + \frac{1}{2} - 2 \right) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \tau. \mu. \end{aligned}$$

$$\blacksquare E(\Omega_2) = \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_2^e = \ln e - \ln 2 = (1 - \ln 2) \tau. \mu.$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \frac{1}{2} \tau. \mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(x) = (x-1)g(x) + 2x, \quad x \in (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x) + 2x] = 0 \cdot l + 2 \cdot 1 = 2 \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \right] = \ln 1 - 1 + k = k - 1 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει: $k-1=2 \Leftrightarrow k=3$.

Δ2. Για $k=3$ είναι:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \quad x \in (0, 2)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, 2)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παρ/μη στο $(0, 2)$ με

$$f'(x) = \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right)' = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} =$$

$$\frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$$

$$\blacksquare f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ απορ. ή } x = 1.$$

$$\blacksquare f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2(2-x) > 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\blacksquare f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	2
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ αφού η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(0, 1)$.

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2)$ αφού η f είναι συνεχής στο $[1, 2)$ και ισχύει

$f'(x) < 0$ στο $(1, 2)$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $\Delta_1 = (0, 1]$ και $\Delta_2 = (1, 2)$.

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, 1]$ τότε

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right]$$

Έχουμε:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(2-x) + 3] = \ln 2 + 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\blacksquare f(1) = \ln 1 - 1 + 3 = 2$$

Άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

-Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (1, 2)$ τότε

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right)$$

Έχουμε:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = \lim_{2-x=u} \ln u = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{x} + 3 \right) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{f \text{ συνεχής} \\ \text{στο } 1}} f(1) = 2$$

Άρα $f(\Delta_2) = (-\infty, 2)$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει $x_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

$$\text{Έχουμε } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{5}{3} > 0 \text{ αφού } \frac{5}{3} > 1$$

$$\text{οπότε } 0 < \ln \frac{5}{3} \Rightarrow f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \uparrow (0, 1] x_1 < \frac{1}{3}$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και παρ/μη στο $(x_1, \frac{1}{3})$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Η f' είναι παρ/μη στο $(0, 2)$ με

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 2).$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0, 1)$ στο οποίο η κλίση της

$$C_f \text{ ισούται με } \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

Δ4. i) Επειδή F και G είναι αρχικές συναρτήσεις της f στο $(0, 2)$ υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F(x) = G(x) + C$ για κάθε $x \in (0, 2)$ (3).

Για $x = x_1$ από (3) προκύπτει:

$$F(x_1) = G(x_1) + C \quad F(x_1) = 0 \quad C = -G(x_1)$$

Άρα $F(x) = G(x) - G(x_1)$ για κάθε $x \in (0, 2)$ (4)

Για $x = x_2$ από (4) προκύπτει:

$$F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \quad G(x_2) = 0 \quad F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2, \quad x \in [x_1, x_2].$$

• Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (οι F, G είναι συνεχείς στο $(0, 2)$ αφού F, G είναι παρ/μες στο $(0, 2)$).

• $g(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) + 2x_1 - x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} F(x_1) &= 0 \\ &= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

ι

$$= -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2$$

$$g(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + 2x_2 - x_1 - x_2$$

$$G(x_2) = 0$$

$$= x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$$

ι

Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2) . Αφού $f(1) = 2 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επειδή $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

$$\text{Είναι } x_2 > x_1 \xrightarrow{F \uparrow} F(x_2) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) > 0.$$

Άρα $g(x_1) < 0$ (αφού $-x_2 F(x_2) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$) και $g(x_2) > 0$ (αφού $x_1 F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$).

Οπότε $g(x_1) g(x_2) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

Η g είναι παρ/μη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2$

$$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2$$

$$= (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$$

για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) και επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (x_1, x_2) .

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr