

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

A4. α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_h = [1, +\infty)$, $A_g = [1, +\infty)$

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ οπότε } A_f = (1, +\infty) \text{ και } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Επίσης } A_r = [1, +\infty) \text{ και } r(x) = g(x) \cdot h(x) = x - \frac{1}{x}.$$

B2. Έχουμε $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$. Η f είναι 1-1 αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε $x_1 = x_2$ οπότε η f αντιστρέφεται. Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$, $x \in (1, +\infty)$ και έχουμε $x = \frac{y+1}{y-1}$, $y > 1$. Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

B3. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

B4. Αφού $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται

$$x^2 = 1 + 4 \cdot \frac{x^2 - 1}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \text{ οπότε } x=1 \text{ απορρίπτεται, ή } x = -1 \text{ απορρίπτεται ή } x=4 \text{ δεκτή αφού } x \in (1, +\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=2$ θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = e^\lambda$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = \lambda + 1$$

$$\blacksquare f(2) = \lambda + 1$$

$$\text{Επομένως } e^\lambda = \lambda + 1 \quad (1)$$

Επειδή $e^x \geq x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$, από την (1) προκύπτει ότι $\lambda=0$.

Γ2. Για $\lambda=0$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι: $f'(x) = (-2x + 5)' = -2 < 0$.

Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4 < 0$.

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x=2$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Για $x=0$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=5$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, 2)$ και $(2, 3)$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x - 2)] = 0 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Επομένως δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ.

ii) Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\varepsilon} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 5}{3} = -\frac{5}{3}$$

• Για $x \in (0, 2)$ έχουμε:

$$f'(x) = -2 \neq -\frac{5}{3}$$

• Για $x \in (2, 3)$ έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} \in (2, 3)$$

$$\text{Άρα } \xi = \frac{17}{6}$$

Γ4. Έστω $y(t)$ η τεταγμένη του σημείου M τη χρονική στιγμή t .

Αν t_0 η χρονική στιγμή που το σημείο M συναντάει την C_f στο σημείο $(2, 1)$, τότε $y(t_0) = 1$ μονάδα μήκους και $y'(t_0) = 0,5$ μονάδες μήκους/sec.

Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{(AM)}{(OA)} = \frac{y(t)}{2}$$

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))' = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \omega(t) \cdot y'(t)$$

Για $t = t_0$ είναι:

$$\sin \omega(t_0) = \frac{(AM)}{(OM)} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Επομένως

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \omega(t_0) \cdot y'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0,5 = \frac{1}{5} \text{ rad/sec.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \alpha, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + \alpha \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\blacksquare f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\blacksquare f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

$$\blacksquare f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Για $x=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} + \alpha = \frac{1}{e} + \alpha$$

$$\text{και αφού } f((0, +\infty)) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$$

Το $1 + \frac{1}{e}$ είναι το μέγιστο της f .

$$\text{Άρα } \frac{1}{e} + \alpha = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2.

$$\text{Για } \alpha = 1 \text{ έχουμε } f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = -\infty$$

$$\text{αφού } \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = -\infty$$

$$\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

D.L.H.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (0, e]$, οπότε

$f|_{A_1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e} \right]$ και αφού $0 \in f(A)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(0, e)$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

$$\text{Επειδή } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = -2 \ln 2 + 1 = 1 - \ln 4 = \ln e - \ln 4 < 0$$

$$\text{και } f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$$

Τότε $f(1/2) \cdot f(1) < 0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1/2, 1)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1/2, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = (e, +\infty)$, οπότε

$$f|_{A_2} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right) = \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right)$$

και αφού $0 \notin f(A_2)$, εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(e, +\infty)$.

Δ3.

$$f(2) = \frac{\ln 2}{2} + 1 = \frac{2 \ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 4}{4} + 1 = f(4)$$

$$\blacksquare f(x) = f(4) \begin{matrix} f \downarrow [e, +\infty) \\ \iff \\ f \uparrow [1, 1] \end{matrix} \iff x = 4$$

$$\blacksquare f(x) = f(4) \iff f(x) = f(2) \begin{matrix} f \uparrow [0, e] \\ \iff \\ f \uparrow [1, 1] \end{matrix} \iff x = 2$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$2^x \leq x^2 \iff \ln 2^x \leq \ln x^2 \iff x \ln 2 \leq 2 \ln x \iff \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \iff \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \iff$$

$$\iff f(x) \geq f(2) = f(4)$$

$$\blacksquare f(x) \geq f(2) \begin{matrix} f \uparrow [2, e] \\ \iff \\ \textcolor{red}{\downarrow} \end{matrix}$$

$$\blacksquare f(x) \geq f(4) \begin{matrix} f \downarrow [e, +\infty) \\ \iff \\ \textcolor{red}{\downarrow} \end{matrix}$$

Άρα $x \in [2, 4]$.

Δ4. • Η f είναι συνεχής στο $[-\ln 2, 0]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

• Για κάθε $x \in [-\ln 2, 0]$ έχουμε:

$$f(x) = 0 \iff f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} = 0 \iff f(e^x) = 0 \iff \begin{matrix} -\ln 2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq e^x \leq 1 \end{matrix} \iff e^x = x_0 \iff x = \ln x_0$$

Έχουμε: $\frac{1-x}{e^x} > 0$ για κάθε $x \in [-\ln 2, 0]$.

• Για κάθε $-\ln 2 \leq x \leq \ln x_0 \iff \frac{1}{2} \leq e^x \leq x_0 \iff f \uparrow \left[\frac{1}{2}, x_0 \right]$
↓

Άρα $g(x) \leq 0$, $x \in [-\ln 2, \ln x_0]$.

• Για $\ln x_0 \leq x \leq 0 \iff x_0 \leq e^x \leq 1 \iff f \uparrow [x_0, 1] \iff 0 = f(x_0) \leq f(e^x) \leq f(1)$
↓

Άρα $f(x) \geq 0$, $x \in [\ln x_0, 0]$.

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= - \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x) dx + \int_{\ln x_0}^0 g(x) dx = - \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f(e^x) \cdot (f(e^x))' dx + \int_{\ln x_0}^0 f(e^x) \cdot (f(e^x))' dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} [f^2(e^x)] \right]_{-\ln 2}^{\ln x_0} + \frac{1}{2} [(f^2(e^x))]_{\ln x_0}^0 \\ &= \frac{1}{2} \left[f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(x_0)] \\ &= \frac{1}{2} \left[f^2(1) + f^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2 \ln 2)^2] = \frac{1}{2} (2 - 4 \ln 2 + 4 \ln^2 2) = 1 - 2 \ln 2 + 2 \ln^2 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΛΥΜΟΥΡΑ Γ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr