

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2009

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A.α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 323

B. 1. Λ

2. Λ

3. Λ

4. Λ

5. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο:

α. $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$

$f(0) = a$ και $f'(0) = -a$

$e: y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(0, f(0))$. Ταυτίζεται με την $y = -2x + 2$ όταν $-a = -2$ και $a = 2$ δηλαδή όταν $a = 2$.

β. Για $a = 2$ είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ και $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $-x^2 + 2x - 2 < 0$ και $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 2)e^{-x}] = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2) \cdot e^{-x}]^{(+\infty \cdot 0)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} \stackrel{(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

δ. Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(A) = (0, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 2009. Η $f(x)$ στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^ο:

$$|z + w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 0 \quad (1) \quad z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}} = 0 \Leftrightarrow$$

α. $2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0$

β. Ισχύει $z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα (α)) $z \cdot \bar{w} = -\bar{z} \cdot w$. Διαιρούμε με

$\bar{w}w = |w|^2$ και έχουμε $\frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ που σημαίνει ότι $\frac{z}{w}$ φανταστικός.

γ. Αν A, B οι εικόνες των z, w τότε $(OA) = |z|, (OB) = |w|$ και $(AB) = |z - w|$.

Αρκεί ότι $(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2$
 $\Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0$ ισχύει.

δ. Είναι

$$z \cdot \bar{w} = [a + i \cdot f(a)][f(b) + bi] = a \cdot f(b) - b \cdot f(a) + [a \cdot b + f(a) \cdot f(b)]i$$

οπότε $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(b) - b \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$.

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) η εξίσωση $x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την

$h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha, \beta]$, άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$...

ΘΕΜΑ 4^ο:

Για $x \in \mathbb{R}$, f συνεχής, f' συνεχής οπότε έχουμε

$$f'(x) \cdot (x^2 + e) = 2 - 2xf(x) \quad \text{ή}$$

$$f'(x) \cdot (x^2 + e) + 2xf(x) = 2 \quad \text{ή}$$

$$[f(x)(x^2 + e)]' = (2x)' \quad \text{ή}$$

$$f(x)(x^2 + e) = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \frac{2x + c}{x^2 + e}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $f(0) = 0$ είναι $c = 0$ οπότε $f(x) = \frac{2x}{x^2 + e}$.

B.i.

$$E(a) = \int_0^a |f(x)| dx = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + e} dx = [\ln|x^2 + e|]_0^a = \ln(a^2 + e) - 1$$

ii.

$$E'(a(t)) = [\ln(a^2(t) + e) - 1]' = \frac{1}{a^2(t) + e} \cdot 2a(t) \cdot a'(t) = \frac{1}{e^2 + e} \cdot 2 \cdot \frac{5}{e} e = \frac{10}{e^2 + e}$$

cm²/sec.

$$- \left| f(x) \right| \leq g(x) + 2x - 3 \leq \left| f(x) \right|$$

Γ.i. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2x - 3) = 0$$

Οπότε $y = -2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη C_g στο $+\infty$.

$$\text{ii. } \int_0^2 |g(x) + 2x - 3| dx \leq \int_0^2 |f(x)| dx$$

$$\text{Άρα } E \leq \ln(4 + e) - 1$$

$$\Delta. \text{ ΙΣΧΥΕΙ } |f(x) \ln 2x| \leq |f(x)|.$$

Κάνουμε Κριτήριο Παρεμβολής.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ