

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο:

Α.α. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

♦ Οι f, g είναι συνεχείς στο Δ

♦ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 10

β. Έστω f ορισμένη στο Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση F της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 5

Β. Να απαντήσετε αν είναι Σωστή ή Λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) f(\beta) < 0$.

3. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

4. Αν για δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο Δ να ισχύει $f''(x) = g''(x)$ για κάθε εσωτερικό x του Δ τότε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει αρχική στο διάστημα Δ τότε για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a = 2$

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2009$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο:

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\operatorname{Re}(z \cdot w) = 0$.

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και $z = \alpha + i f(\alpha)$, $w = f(\beta) - \beta i$ τότε η εξίσωση $x f'(x) = f(x)$ έχει τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με f' συνεχή στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν

$$\int_1^x f'(t)(t^2 + e)dt + 2 = 4 \int_0^1 xtdt + 2 \int_x^1 t \cdot f(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$

A) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + e}$

Μονάδες 5

B)i) Να δείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\alpha>0$ ισούται με $E(\alpha)=\ln(\alpha^2+e)-1$.

Μονάδες 4

ii) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t) = \frac{5}{e}$ cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ την χρονική στιγμή κατά την οποία το $\alpha=e$.

Μονάδες 4

Γ) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει $|g(x) + 2x - 3| \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-2x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g όταν $x \rightarrow +\infty$.

Μονάδες 4

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_g , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$ δείξετε ότι $E \leq \ln(4+e) - 1$.

Μονάδες 4

Δ) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \ln 2x)$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΛΙΣ