

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ  
ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΥΡΙΑΚΗ 18 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:**

**A.** Θεωρία σχολικού βιβλίου.

**B.** Θεωρία σχολικού βιβλίου.

**Γ. α)** Σ

**β)** Λ

**γ)** Λ

**δ)** Σ

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:**

**A.** Είναι  $f'(1) = -\frac{1}{e}$  οπότε  $\mu=2$

**B. α)**  $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{e^x} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα  $f \searrow$  στο  $\mathbb{R}$ . Ακρότατα δεν υπάρχουν.

**β)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = 0$

**γ)**  $A = (-\infty, +\infty)$ ,  $f \searrow$  στο  $\mathbb{R}$

$f(A)=(0,+\infty)$  . Το 2010 ανήκει στο  $f(A)$  οπότε η εξίσωση  $f(x)=2010$  έχει μοναδική λύση στο  $\mathbb{R}$ .

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>:**

$$\alpha) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{\frac{z+i}{1+iz} - i}{\frac{z+i}{1+iz} + i} \right| = \left| \frac{2z}{2i} \right| = \frac{|2z|}{|2i|} = |z|$$

$$\beta) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w-i| = |w+i| \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} \dots \Leftrightarrow y=0$$

$$\gamma) \text{ Έστω } w = -\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\overline{\left(\frac{z+i}{1+iz}\right)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$

$$\delta) \text{ Ισχύει } w = \frac{z+i}{1+iz} \rightarrow f(b)i = \frac{f(a)i+i}{1+(f(a)i)} \quad \eta$$

$$f(\beta)i = \frac{i(f(\alpha)+1)}{1-f(\alpha)} \quad \eta \quad f(\beta)i = \frac{f(\alpha)+1}{1-f(\alpha)} < 0$$

Άρα  $f(a) \cdot f(b), 0$  οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μια ρίζα  $\beta$  το  $(\alpha, \beta)$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>:**

$$i) \quad f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} \quad \eta \quad 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 2 \quad \eta$$

$$(f^3(x) + f(x))' = (2x)' \quad \text{οπότε } f^3(x) + f(x) = 2x + c.$$

Επειδή  $f(0)=0$  είναι  $c=0$  άρα  $f^3(x)=+f(x)=2x$ .

$$f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0$$

ii) Επειδή  $f$   $\nearrow$  στο  $\mathbb{R}$  άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Και θέτουμε  $f(x)=y$  οπότε  $y^3+y=2x$  άρα

$$x = \frac{1}{2}(y^3 + y) \quad \text{οπότε} \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^3 + y), y \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x), x \in \mathbb{R}$$

iii)  $E(W) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx$  αφού  $f(x) \geq 0$  για  
κάθε  $x \in [0,1]$ . Θέτουμε  $f(x)=u$ .

iv) Αφού  $f(0)=0$  και  $f(1)=1$  και  $f$  συνεχής στο  $[0,1]$  τότε

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{αφού} \quad \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } a \in (0,1)$$

$$f(a) = \frac{1}{2}$$

τέτοιο ώστε

v) Είναι

$$\int_0^x \frac{2}{3f^2(t)+1} dt \leq \int_0^a \frac{2}{3f^2(t)+1} dt + \int_a^1 \frac{2}{3f^2(t)+1} dt \quad \text{ή}$$

$$2f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 2f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq f(a)$$

$x \leq a$  ΙΣΧΥΕΙ.