

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ
ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 18 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

B. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Γ. α) Σ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ΘΕΜΑ 2^ο:

A. Είναι $f'(1) = -\frac{1}{e}$ οπότε $\mu=2$

B. α) $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{e^x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$. Ακρότατα δεν υπάρχουν.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} = 0$

γ) $A = (-\infty, +\infty)$, $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$

$f(A) = (0, +\infty)$. Το 2010 ανήκει στο $f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=2010$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^ο:

$$\alpha) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{\frac{z+i}{1+iz} - i}{\frac{z+i}{1+iz} + i} \right| = \left| \frac{2z}{2i} \right| = \frac{|2z|}{|2i|} = |z|$$

$$\beta) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w-i| = |w+i| \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} \dots \Leftrightarrow y = 0$$

$$\gamma) \text{ Έστω } w = -\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\overline{\left(\frac{z+i}{1+iz}\right)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

$$\delta) \text{ Ισχύει } w = \frac{z+i}{1+iz} \rightarrow f(\beta)i = \frac{f(\alpha)i+i}{1+(f(\alpha)i)} \quad \text{ή}$$

$$f(\beta)i = \frac{i(f(\alpha)+1)}{1-f(\alpha)} \quad \text{ή} \quad f(\beta)i = \frac{f(\alpha)+1}{1-f(\alpha)} < 0$$

Άρα $f(\alpha), f(\beta), 0$ οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα β το (α, β) .

ΘΕΜΑ 4^ο:

$$i) \quad f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} \quad \text{ή} \quad 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 2 \quad \text{ή}$$

$$(f^3(x) + f(x))' = (2x)' \text{ οπότε } f^3(x) + f(x) = 2x + c.$$

$$\text{Επειδή } f(0)=0 \text{ είναι } c=0 \text{ άρα } f^3(x) + f(x) = 2x.$$

ii) Επειδή $f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε

$f \nearrow$ στο R άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Και θέτουμε $f(x)=y$ οπότε $y^3+y=2x$ άρα

$x = \frac{1}{2}(y^3 + y)$ οπότε $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y^3 + y), y \in R$ και

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x), x \in R.$$

iii) $E(\Omega) = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx$ αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θέτουμε $f(x)=u$.

iv) Αφού $f(0)=0$ και $f(1)=1$ και f συνεχής στο $[0,1]$ τότε αφού $0 < \frac{1}{2} < 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.

v) Είναι

$$\int_0^x \frac{2}{3f^2(t)+1} dt \leq \int_x^0 \frac{2}{3f^2(t)+1} dt + \int_0^1 \frac{2}{3f^2(t)+1} dt \quad \eta$$

$$2f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 2f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$$

$x \leq \alpha$ ΠΧΥΕΙ.