

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ
ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 18 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν
 $\square$ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
 $\square f(a) \neq f(b)$ τότε δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

B. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε λέμε ότι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης f .

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος:

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

Μονάδες 2

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

γ) Αν για δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Μονάδες 2

δ) Είναι: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο:

Εστω συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + m}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε την τιμή του m ώστε η ευθεία να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$

Μονάδες 5

B. για $m=2$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 7

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2010$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο:

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z \neq$

α) Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

Μονάδες 7

β) Αν $|z|=1$ δείξτε η εικόνα M του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον άξονα $x'x$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία : w φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) > 1$ και έστω $z=f(\alpha) \cdot i$ και $w=f(\beta) \cdot i$. Δείξτε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = \int_0^x \frac{2}{3f^2(t)+1} dt$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i) Δείξτε ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

ii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 6

iv) Δείξτε ότι υπάρχει $a \in (0,1): f(a) = \frac{1}{2}$

Μονάδες 3

v) Δείξτε ότι $\int_0^x \frac{2}{3f^2(t)+1} dt \leq \int_0^1 \frac{2}{3f^2(t)+1} dt$ για κάθε $x \leq 1$.

Μονάδες 4

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
3. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
5. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ