

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΚΥΡΙΑΚΗ 10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2011

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

Α. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ

Αν $\forall$ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και

$$\forall f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 9

Β. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Τι ονομάζουμε Αρχική συνάρτηση ή Παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 3

β) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z και με τι ισούται;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

- i.** Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι 1-1 και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

Μονάδες 2

- ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τότε ώστε $f(x_0)=0$, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Μονάδες 2

- iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

- iv. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 2

- v. Για τις συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς παράγωγους στο $[\alpha,$

$$\beta] \text{ ισχύει } \int_a^b f(x) dg(x) = f'(x) \int_a^b g(x) dx - [f(x)g(x)]_a^b.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + k}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$ τότε:

- i. Δείξτε ότι $k=2$.

Μονάδες 6

- ii. Μελετήστε την μονοτονία της f .

Μονάδες 6

- iii. Υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 7

iv. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2011$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{C}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, w με $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ για τους οποίους ισχύει

$$w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}.$$

Αν $|w| = 1$ να αποδείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

Μονάδες 8

ii. Ο αριθμός $u = \frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

iii. Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 5

iv. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και

$z_1 = 1 + if(1), z_2 = f(2) - 2i$ τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει μια τουλάχιστο λύση στο $(1, 2)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)\ln x = f(x), x \geq 2$ και $f(3)=\frac{1}{\ln 3}$.

i. Δείξτε ότι $f(x)=\frac{1}{\ln x}, x \geq 2$.

Μονάδες 6

ii. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$.

Μονάδες 5

iii. Δείξτε ότι $f(2)+f(4)>\frac{2}{\ln 3}$.

Μονάδες 5

iv. Να βρείτε το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της g , του $x'x$, και τις ευθείες $x=e, x=t$ με

$$t > e \text{ αν } g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Μονάδες 5

v. Υπολογίστε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t}$.

Μονάδες 4

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να **μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
4. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
5. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ