

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου

A2. α) Θεωρία σχολικού βιβλίου

β) Θεωρία σχολικού βιβλίου

A3.

i) Λ

ii) Λ

iii) Σ

iv) Λ

v) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $\left| \frac{z - 3i}{2z + 3i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i| = |2z + 3i| \Leftrightarrow \dots |z + 3i| = 3$

B2. Ο Γ.Τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(0, -3)$ και ακτίνα $\rho=3$.

B3. Είναι $|z - 6 - 5i| = |z + 3i - 6 - 8i| = |(z + 3i) + (-6 - 8i)|$ και εφαρμόζουμε τριγωνική ανισότητα.

B4. Η μέγιστη απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 είναι $|z_1 - z_2| = 2\rho = 2 \cdot 3 = 6$. Άρα γενικά $|z_1 - z_2| \leq 6$

B5. Αν A, B εικόνες των z_1, z_2 και Γ εικόνα του $z_1 + z_2$ τότε από το ορθογώνιο $AB\Gamma O$ προκύπτει $|z_1 + z_2| = 6$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)}$ ή $f'(x) + 3f^2(x) \cdot f'(x) = 2$ ή $(f(x) + f^3(x))' = (2x)'$ οπότε $f(x) + f^3(x) = 2x + c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=0$. Άρα $f^3(x) + f(x) = 2x$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα ακρότατα δεν υπάρχουν.

Γ3. Θεωρούμε $h(x) = f(x) - x^2$ και εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $(0, 1)$.

Γ4. Θεωρούμε $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και δημιουργούμε την ανίσωση με την βοήθεια της μονοτονίας και του ακρότατου της Φ .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ οπότε $\int_a^b h(x) dx \geq 0$ δηλαδή $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$ άρα $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Δ2. i) Είναι $f'(x) = -2xf(x)$ ή $\frac{f'(x)}{f(x)} = -2x$ ή $(\ln f(x))' = (-x^2)'$ ή $\ln f(x) = -x^2 + c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=0$ άρα $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Είναι $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο $x=0$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $(0, 1]$.

iii) Η ισότητα ισχύει για $x=0$.

$$\frac{\int_0^x e^{-t} dt}{x} \geq e^{-x^2}$$

Για $x > 0$ έχουμε

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την $f(u) = \int_0^u e^{-t} dt$ στο $[0, x]$

iv) α) Αποδ. ότι $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ στο $[0, 1]$. Θεωρούμε

$T(x) = e^{-x^2} - 1 + x^2$ και μελετούμε μονοτονία - ακρότατα.

Αποδ. ότι $e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq e^0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ ισχύει.

β) Λόγω του Δ1 $\int_0^1 (1 - x^2) dt \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq \int_0^1 dt$ ή $\frac{2}{3} \leq E(W) \leq 1$.