

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι: αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 10

A2. α) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε Αρχική συνάρτηση ή Παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 3

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε θα λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 2

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

iv. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$(a^x)' = \frac{a^x}{\ln a}.$$

Μονάδες 2

- v. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $\left| \frac{z-3i}{2z+3i} \right| = 1, z \neq -\frac{3i}{2}$.

B1. Δείξτε ότι $|z+3i| = 3$.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

Μονάδες 6

B3. Δείξτε ότι $7 \leq |z-6-5i| \leq 13$.

Μονάδες 6

B4. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, δείξτε ότι $|z_1 - z_2| \leq 6$.

Μονάδες 4

B5. Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου τέτοια ώστε $|z_1 - z_2| = 6$, να δείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 6$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)} dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Αποδείξτε ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. Δείξτε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ3. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

Μονάδες 7

Γ4. Δείξτε ότι $\int_a^x f(t)dt \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. να αποδείξετε ότι :

Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Δ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f'(x) = -2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Μονάδες 4

i) Δείξτε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq x \cdot e^{-x^2}$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 4

iv) α. Να αποδείξετε ότι $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του χωρίου $E(\Omega)$ που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$, $x=1$

$$\frac{2}{3} \leq E(\Omega) \leq 1$$

ισχύει .

Μονάδες 4

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
3. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

4. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
5. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ