

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μ. ΤΡΙΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2. i) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

ii) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3.

α)Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

στ) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $\left| \frac{z - 4i}{4} \right| = \frac{1}{2} |z - i| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |z| = 2$

. Άρα ο ΓΤ των εικόνων του z είναι κύκλος με $K(0, 0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$.

B2. Είναι $w(z - i) - 2zi - 8 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow w = \frac{2z(\bar{z} + i)}{z - i}, z \neq i$

Αν $z=i$ τότε η ισότητα είναι αδύνατη.

Οπότε $|w| = \frac{2|z||\bar{z} + i|}{|z - i|} = 2|z| = 4$

Άρα ο ΓΤ των εικόνων του w είναι κύκλος με $K(0, 0)$ και $\rho_2=4$.

B3. Αρκεί $v = -\bar{v}$.

Πράγματι $v = -\bar{v} \Leftrightarrow \frac{2z - w}{2z + w} = -\frac{\bar{2z} - \bar{w}}{\bar{2z} + \bar{w}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 4|z|^2 = |w|^2$

Ισχύει αφού $|z|=2$ και $|w|=4$.

B4. Είναι $(M\Lambda) = |z_1 - w|$

$(N\Lambda) = |z_2 - w|$

Ισχύει $||z_1| - |w|| \leq |z_1 - w| \leq |z_1| + |w|$ ή $2 \leq |z_1 - w| \leq 6$ (1)

Ομοίως $2 \leq |z_2 - w| \leq 6$ ή $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{|z_2 - w|} \leq \frac{1}{2}$ (2)

Από (1), (2) $\frac{1}{3} \leq \frac{|z_1 - w|}{|z_2 - w|} \leq 3$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτουμε $x \cdot t = u$ οπότε $x \, dt = du$ και για $x=0$ είναι $u=0$
 $x=1$ είναι $u=x$

άρα $f(x) = e^x + \int_0^x f(u) du$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε η $\int_0^x f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Γ2. Είναι $f'(x) = e^x + f(x)$ ή

$f'(x) - f(x) = e^x$ ή

$\frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 1$ ή

$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{e^x} \right) = 1$

Οπότε $f(x) = x e^x + c \cdot e^x$

Αφού $f(0)=1$ έχουμε $0 \cdot e^0 + c \cdot e^0 = 1$ ή $c=1$.

Άρα $f(x) = x \cdot e^x + e^x$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2e^x + xe^x > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα και «ένα προς ένα» οπότε αντιστρέφονται.

• $A = [0, +\infty)$, $f \uparrow$ άρα $f(A) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$. Όμως $f(0) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $f(A) = [1, +\infty) = A_{f^{-1}}$.

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A είναι $y - f(1) = f'(x)(x - 1)$ ή $y = 3ex - e$.

Έχουμε $f''(x) = 3e^x + xe^x > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ άρα $f(x) \geq 3x - e$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Το « $\geq$ » ισχύει στο σημείο επαφής $A(1, f(1))$.

Γ5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x + e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^x}{e^x} + \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε $h(x) = f(x) - |f'(x)|$ για $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $h(0) = f(0) - |f'(0)| = 1 - 1 = 0$ άρα $h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή η h στο $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε από Θ. Fermat $h'(0) = 0$.

• $h'(x) = f'(x) - f''(x) = |f'(x)| - f''(x)$ οπότε
 $h'(0) = f'(0) - f''(0) = 1 - 1 = 0$
 $f'(0) = 1$ και $f''(0) = 1$ άρα $h'(0) = 0$.

$f''(0)=0$ ή $|f'(\theta)| = \dots$ οπότε $|f'(1)| \neq f'(\alpha) \neq \dots$ ή $f(\alpha)=0$ Απορρίπτεται ($f''(x)>0$ για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$).

$\Delta 2.$ Είναι (I) $f(x) \leq (x - \dots)$ ή $\dots$
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[x, \alpha]$.

$\Delta 3.$ Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$ άρα $f'(x) \uparrow$ στο $[-\alpha, \alpha]$ οπότε για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)$ δηλαδή $f'(x)>0$. Άρα η $f \uparrow$ στο $[0, \alpha]$ άρα για $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0)$.

- Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (I) με $f(x) \geq 0$ και έχουμε

$$(f(x)-f(0))f(x) \leq (x-f(0))f(x) \leq \dots$$

$$(f(x)-f(0))f(x) - (x-f(0))f(x) \leq \dots$$

$\Delta 4.$ $E(\Omega) = \int_0^{\alpha} f(x)dx = E$

Από την σχέση του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε

$$\int_0^{\alpha} (f(x)-f(0))^2 dx - 0(x-f(0)) \leq \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\alpha} (f(x)-f(0))^2 dx - \int_0^{\alpha} f(x)dx - \int_0^{\alpha} (x-f(0))f(x)dx \leq \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} (f(x))^2 dx \leq \frac{4}{3}E$$