

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μ. ΤΡΙΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 10

A2. i) Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

ii) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f στο $x_0 \in A$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις.

- $\left| \frac{z}{4} - i \right| = \frac{1}{2} |z - i|$ (1)
- $w(z-i) - 2zi - 8 = 0$ (2)

B1. Να αποδείξετε ότι ο Γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο το $K(0,0)$ και ακτίνα $p_1=2$.

Μονάδες 8

B2. Να δείξετε ότι $w = \frac{2z(z+i)}{z-i}$ και αποδείξετε ότι ο Γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα $p_2=4$.

Μονάδες 7

B3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $v = \frac{2z-w}{2z+w}$ με $w \neq 2z$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 6

B4. Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί με εικόνες τα σημεία M, N που ικανοποιούν στην (1) και w ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα το σημείο Λ που

ικανοποιεί τη σχέση (2) τότε αποδείξτε ότι $\frac{1}{3} \leq \frac{(ML)}{(NL)} \leq 3$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$f(x) = e^x + \int_0^1 x \cdot f(xt) dt$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x + e^x$.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x - e$.

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ με $f(0) = f'(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ και

$$f^{(k)}(x) \geq 1 \quad \text{για κάθε } x \in [-\alpha, \alpha].$$

Δ1. Δείξτε ότι $f(\alpha) = 2$

Μονάδες 7

Δ2. Δείξτε ότι $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + x$, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$.

Μονάδες 5

Δ3. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, \alpha]$ ισχύει $f(x) \geq \frac{1}{6}x^3$ και $(f(x) - \frac{1}{6}x^3)' \geq 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \alpha$, να δείξετε ότι $\int_0^\alpha (f(x))^2 dx \leq \frac{4}{3}E$.

Μονάδες 8

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**