

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2. i) Θεωρία σχολικού βιβλίου.
ii) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3.

α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.
$$\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{\frac{z+i}{1+iz} - i}{\frac{z+i}{1+iz} + i} \right| = \dots = |z|$$

B2. Αφού $|z|=1$ είναι $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y=0$

B3. $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\overline{\frac{z+i}{1+iz}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = -\overline{z}$ άρα $z \in i\mathbb{R}$.

B4. $w \neq \frac{z+i}{1+iz} \Leftrightarrow f\left(\frac{z+i}{1+iz}\right) \neq \frac{f(i)}{1+f(i)} \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{1+iz}\right) = \frac{f(\alpha)}{1+f(\alpha)}$ και επειδή $f(\alpha) > 1$ τότε $f(\beta) < 0$. Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Έχουμε $f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x} = e$ ή $(f(x)e^{2x})' = (ex)'$ άρα $f(x) = \frac{ex + c}{e^{2x}}$.

Επειδή $f(0) = 2e$ είναι $f(x) = \frac{ex + 2e}{e^{2x}} = (x + 2)e^{1-2x}$.

ii) $f'(x) = e^{1-2x}(-2x - 3)$. Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται από το παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Η f είναι γν. αύξουσα στο $-\infty, -\frac{3}{2}$ και γν. φθίνουσα στο $-\frac{3}{2}, +\infty$.

Στο $x_0 = -\frac{3}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^4$.

$A_1 = -\infty, -\frac{3}{2}$ άρα $f(A_1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^4$

$A_2 = \frac{3}{2}, +\infty$ άρα $f(A_2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(\frac{3}{2}) = 0, \frac{1}{2}e^4$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \frac{1}{2}e^4$
Οπότε

Γ2. $E(\Omega) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx$ αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

$E(\Omega) = \int_0^1 (x + 2)e^{1-2x} dx = \int_0^1 (x + 2) \frac{1}{2} e^{1-2x} dx = \dots$

Γ3. $\alpha > \beta > 0$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα στο $\frac{3}{2}, +\infty$ τότε $f(\alpha) < f(\beta)$ ή

$(\alpha + 2)e^{1-2\alpha} < (\beta + 2)e^{1-2\beta}$ ή ... ή $\sqrt{\frac{\beta + 2}{\alpha + 2}} > e^{\beta - \alpha}$.

Γ4. Είναι $G(x) = x \cdot \int_1^x f(t) dt, x \in \mathbb{R}$.

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \int_1^x f(t) dt + x \cdot f(x)$ και

$$\begin{aligned} f''(x) &= f(x) + f(x) + x f'(x) \\ &= 2(x+2)e^{1-2x} + x(-2x-3)e^{1-2x} \\ &= e^{1-2x}(2x+4-2x^2-3x) \\ &= e^{1-2x}(-2x^2-x+4) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{δηλ.} \quad e^{1-2x}(-2x^2-x+4) = 0 \Leftrightarrow -2x^2-x+4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-2)4 = 1 + 32 = 33.$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{-2}$$

x	$-\infty$	$-1/2 - \sqrt{33}/2$	$-1/2 + \sqrt{33}/2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-
$f(x)$		ΣΚ		ΣΚ 

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\int_0^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du \geq 1 - e^{2x}$ ή $\int_0^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du - 1 + e^{2x} \geq 0, (I)$, για $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε $H(x) = \int_0^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du - 1 + e^{2x}$ και $H(0) = 0$

Άρα η (I) γίνεται $H(x) \geq H(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η H στο $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Η H είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $H'(x) = \int_1^x f(t) dt + 2e^{2x}$.

Από Θ. Fermat $H(0)=0$ δηλ. $\int_1^0 f(t)dt + 2e^0 = 0$ ή $-\int_0^1 f(t)dt = -2$ ή $\int_0^1 f(t)dt = 2$

$$\Phi(x) = \int_0^x 2f(t)dt - \frac{1}{t+1}dt - 2 = 2\int_0^x f(t)dt - \ln|x+1| - 2$$

Δ2. Θεωρούμε

Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την Φ στο $[0, 1]$.

$$T(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt - 2x^2 + x$$

Δ3. Θεωρούμε την

Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $T(x)$ στο $[0, 1]$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ