

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 8

A2. i) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Μονάδες 3

ii) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε θα λέμε ότι η f στρέφει κοίλα άνω ή είναι κύρτη στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό του Δ με $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 .

Μονάδες 2

β. Αν η F είναι μια αρχική της f στο διάστημα Δ , τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(x) = c$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

δ. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$.

Μονάδες 2

ε. Το πεδίο ορισμού της f είναι σύνολο τιμών της f^{-1} και το σύνολο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z \neq i$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$.

Μονάδες 7

B2. Αν $|z|=1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει στον $x'x$.

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $w \in I \Leftrightarrow z \in I$.

Μονάδες 6

B4. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) > 1$ και έστω $z=f(\alpha)i$ και $w=f(\beta)i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \cdot e^{2x} = e - 2e^{2x}f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

i) Δείξτε ότι $f(x) = (x+2)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα και να βρείτε ο σύνολο των τιμών της.

Μονάδες 8

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι αν $\alpha > \beta > 0$ τότε ισχύει $\sqrt{\frac{\beta+2}{\alpha+2}} > e^{\beta-\alpha}$.

Μονάδες 6

Γ4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(x) = \int_1^x xf(t)dt, x \in \mathbb{R}$ έχει δυο σημεία καμπής.
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_0^x \left(\int_1^u f(t)dt \right) du \geq 1 - e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(t)dt = 2$.

Μονάδες 9

Δ2. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1): \int_0^{x_0} \frac{f(t)}{t+1} dt = 2$.

Μονάδες 8

Δ3. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1): \frac{1}{2}f(\xi) = 4\xi - 1$.

Μονάδες 8

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**