

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 28-29

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδες 86-87

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

A4. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού το εύρος $R=20$ min και το πλήθος των κλάσεων είναι $k=5$, τότε

$$c = \frac{R}{k} = \frac{20}{5} = 4$$

. Αν οι κλάσεις είναι $[α, α+4)$, $[α+4, α+8)$, $[α+8, α+12)$, από την κεντρική τιμή της 3^{ης} κλάσης

$$x_3 = \frac{(α+8)+(α+12)}{2} \Leftrightarrow \frac{α+20}{2} \Leftrightarrow \frac{20-20}{2} + α + 4 = 4, \text{ άρα οι κλάσεις είναι } [0, 4), [4, 8), [8, 12), [12, 16), [16, 20).$$

Έχουμε επίσης ότι $N_5=50$, αφού $N_5=n$, άρα $n=50$.

Επίσης, δίνεται ότι 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4 min άρα $v_1=3$, έτσι:

$$f_1 = \frac{v_1}{n} = \frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0,06 \quad \text{και } F_2=0,2, \text{ άρα}$$

$$f_1 + f_2 = 0,2 \Leftrightarrow f_2 = 0,2 - 0,06 \Leftrightarrow f(2) = 0,14$$

$$\frac{v_2}{n} = 0,14 \Leftrightarrow \frac{v_2}{50} = 0,14 \Leftrightarrow v_2 = 7$$

Δίνεται επίσης ότι 20 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 12 min, άρα

$$N_3=20 \Leftrightarrow v_1+v_2+v_3=20 \Leftrightarrow 10+v_3=20 \Leftrightarrow v_3=10, \text{ άρα}$$

$$f_3 = \frac{v_3}{n} = \frac{10}{50} = 0,2$$

και $F_3=f_1+f_2+f_3=0,4$, δίνεται επίσης ότι το 84% των μαθητών περιμένουν χρόνο λιγότερο από 16 min, άρα

$$F_4=84\% \Leftrightarrow F_4=0,84 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3=0,84, \text{ οπότε}$$

$\frac{v_4}{v} = 0,44 \Leftrightarrow \frac{v_4}{50} = 0,44 \Leftrightarrow v_4 = 22$
 $f_4 = 0,84 - 0,4 = 0,44$ και v
 Οπότε $N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 3 + 7 + 10 + 22 = 42$, άρα $v_5 = 50 - 42 = 8$.

Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις: χρόνος σε min	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	N_i	f_i	F_i	$F_i\%$
[0,4)	2	3	3	0,06	0,06	6
[4,8)	6	7	10	0,14	0,2	20
[8,12)	10	10	20	0,2	0,4	40
[12,16)	14	22	42	0,44	0,84	84
[16,20)	18	8	50	0,16	1	100
Σύνολο		50		1		

B2. Για το μέσο χρόνο αναμονής και τη διασπορά:

Κλάσεις: χρόνος σε min	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[0,4)	2	3	6	-10	0,06	300
[4,8)	6	7	42	-6	0,2	252
[8,12)	10	10	100	-2	0,4	40
[12,16)	14	22	308	2	0,84	88
[16,20)	18	8	144	6	1	288
Σύνολο		50	600			968

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 600 = 12$$

Άρα $\bar{x} = 12$ min και η διασπορά ή διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 968 = \frac{1936}{50} = 38,72$$

δηλαδή $s^2 = 38,72$ min², οπότε

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{38,72} = 6,22 \text{ min.}$$

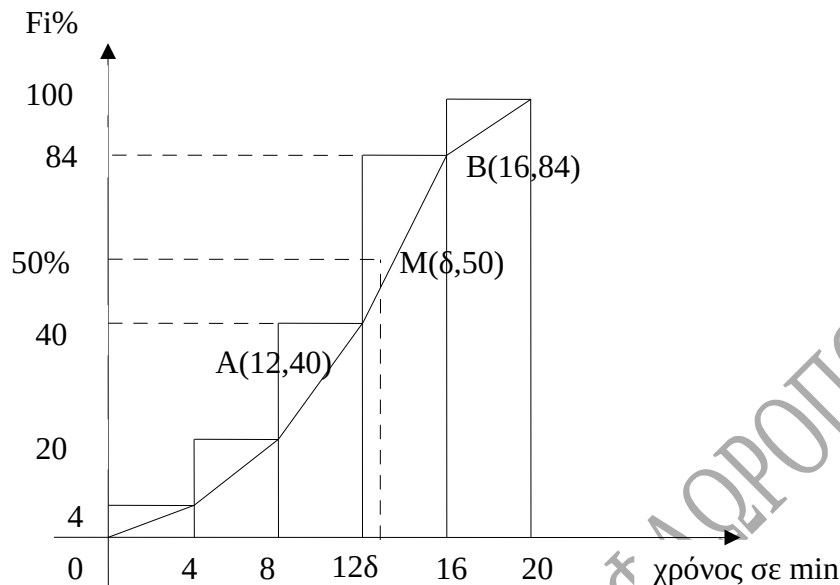
Η διάμεσος δ σε ομαδοποιημένη κατανομή αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής x (στον οριζόντιο άξονα) έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ . Δηλαδή η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$ έτσι στο σχήμα από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό τα σημεία A, M, B είναι συνευθειακά έτσι:

$$\lambda_{AB} = \lambda_{AM} \Leftrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \quad \text{ή}$$

$$\frac{84 - 40}{16 - 4} = \frac{50 - 40}{4 - \delta} \Leftrightarrow \frac{44}{12} = \frac{10}{4 - \delta} \Leftrightarrow \delta = 1,13$$

ή

$$\frac{142}{11} = 12,9 \text{ min περίπου}$$



B3. α) Από το σχήμα έχουμε $\Gamma(8, 20)$, $P(10, y_1)$, $A(12, 40)$

$$\lambda_{GA} = \lambda_{GR} \Leftrightarrow \frac{y_A - y_G}{x_A - x_G} = \frac{y_P - y_G}{x_P - x_G} \Leftrightarrow \frac{40 - 20}{12 - 8} = \frac{y_1 - 20}{10 - 8}, \text{ άρα}$$

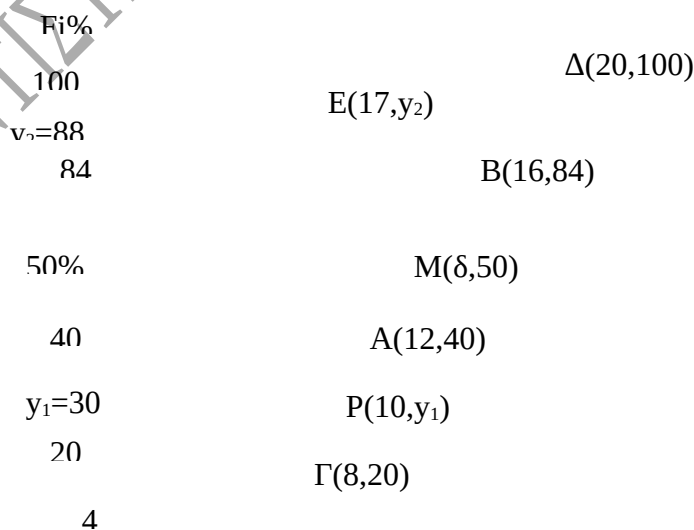
$$\frac{20}{4} = \frac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow y_1 - 20 = 10 \Leftrightarrow y_1 = 30$$

άρα το 30% των μαθητών έχει

χρόνο αναμονής κάτω από 10 min (οπότε το 70% κάνει χρόνο από 10 min και πάνω)

άρα για το ενδεχόμενο $A = \{\text{ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10}$

$$\text{min}\}, \text{ έχουμε } P(A) = P(t < 10 \text{ min}) = \frac{30}{100} = 0,3$$



0 4 8 10 12 8 16 17 20 χρόνος σε min

$$\lambda_{BD} = \lambda_{BE} \Leftrightarrow \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} \Leftrightarrow \frac{100 - 84}{20 - 16} = \frac{y_2 - 84}{17 - 16}, \text{ άρα}$$

$$\frac{16}{4} = \frac{y_2 - 84}{1} \Leftrightarrow 4 = y_2 - 84 \Leftrightarrow y_2 = 88$$

Άρα το 88% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 17 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, άρα χρόνο αναμονής τουλάχιστον 8 min και λιγότερο από 17 min έχει το 88-20=68% του συνόλου των μαθητών. Έτσι για την πιθανότητα του ενδεχομένου $B = \{\text{ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8 min και λιγότερος από 17 min}\}$, έχουμε

$$P(B) = P(8 \leq t < 17 \text{ min}) = \frac{68}{100} = 0,68$$

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A \cap B = \{\text{ο χρόνος αναμονής του μαθητή } 8 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}\}$, τότε το 30% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 10 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, οπότε το 30-20=10% έχει χρόνο αναμονής $8 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}$,

$$\text{άρα } R(A \cup B) = R(A) + R(B) - R(A \cap B) = 0,3 + 0,68 - 0,1 = 0,88, \text{ ενώ}$$

$$R(A - B) = R(A) - R(A \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2,$$

$$\text{έτσι } R((A \cup B) - A) = R(B - A) = R(B) - R(A \cap B) = 0,68 - 0,1 = 0,58$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\delta = 13 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{2\sqrt{x+3} - 4}$$

Γ1. Αρχικά για το όριο

Πρέπει $x+3 \geq 0$ και $2\sqrt{x+3} - 4 \neq 0$ οπότε $x \geq 3$ και $\sqrt{x+3} \neq 2$, άρα $x \geq 3$ και $x+3 \neq 4$, έτσι έχουμε $x \geq 3$ και $x \neq 1$, άρα η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο

$A = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$ άρα για τη συνάρτηση έχουμε:

$$f(x) = \frac{5(x-1)}{2(\sqrt{x+3}-2)} = \frac{5(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{2(x+3)-2(\sqrt{x+3}+2)} \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \frac{5(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{2(\sqrt{x+3})^2 - 2^2} = \frac{5(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{2(x+3-4)} = \frac{5(\sqrt{x+3}+2)}{2}$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{2\sqrt{x+3} - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(\sqrt{x+3} + 2)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\delta = 13 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{2\sqrt{x+3} - 4} = 13 \cdot 10 = 130$$

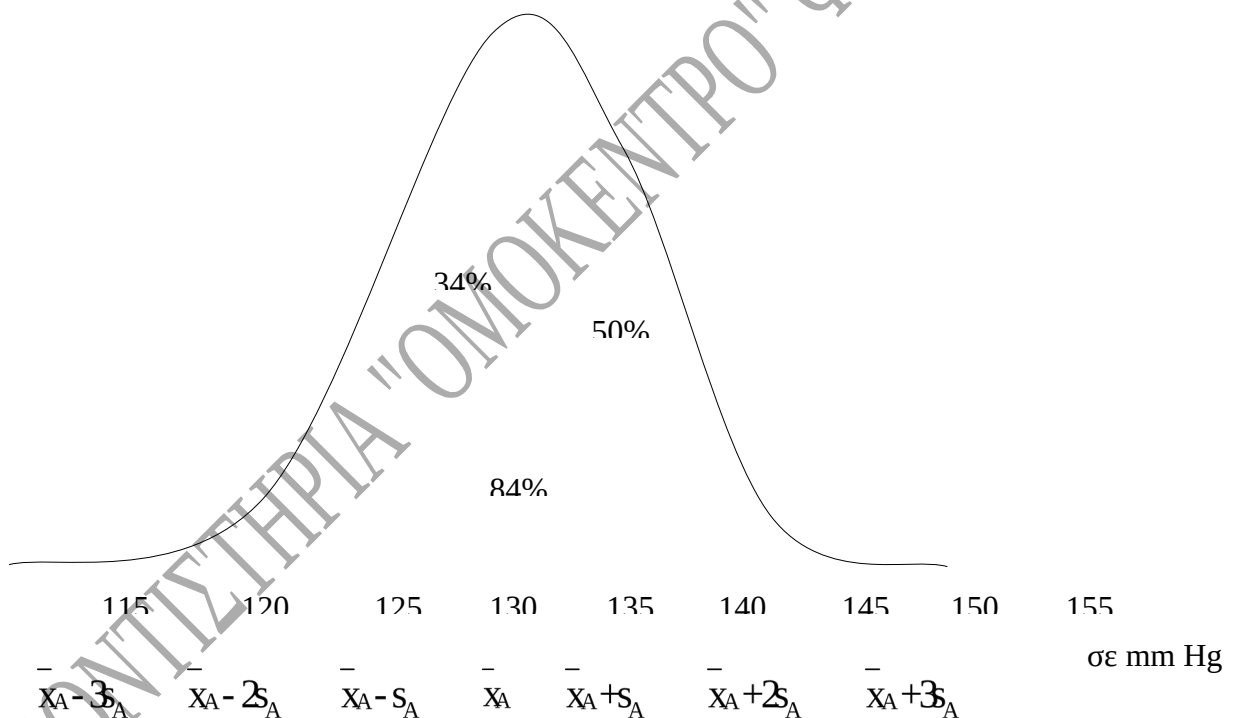
Έτσι

mm Hg.

Όπως γνωρίζουμε στην κανονική κατανομή, η μέση τιμή χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες της $\bar{X}$ και το 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες ή ίσες της $\bar{X}$. Δηλαδή στην κανονική κατανομή ισχύει ότι η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται έτσι $\delta = \bar{X} = 130$ mm Hg.

Αποδεικνύεται ότι στην κανονική κατανομή το 84% έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 mm Hg, άρα πρέπει, $\bar{X}_A - s_A = 125$ mm Hg, όμως $\bar{X} = 130$ mm Hg, άρα $130 - s_A = 125 \Leftrightarrow s_A = 5$ mm Hg.

Έτσι για την κατανομή A έχουμε:



$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{X}_A} = \frac{5}{130} = \frac{1}{26} < \frac{1}{10}$$

Για τον συντελεστή μεταβολής ομοιογενές.

, άρα το δείγμα A είναι

Γ2. α) Για το δείγμα B ξέρουμε ότι κάθε άτομο του δείγματος αυτού παρουσιάζει συστολική πίεση $y_i = x_i + 10$ σε mm Hg, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, σε σχέση με τη συστολική πίεση x_i των ατόμων του δείγματος A.

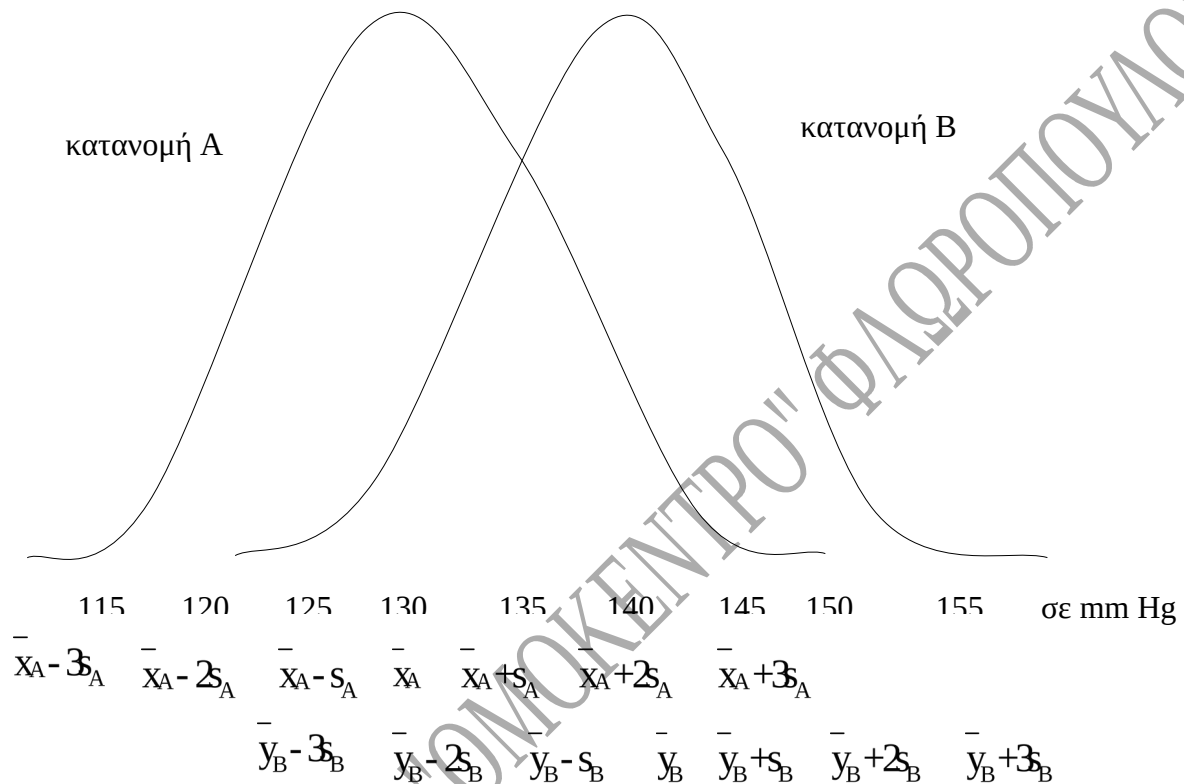
Άρα, από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, θα ισχύει ότι

$$\bar{y}_B = \bar{x}_A + 10 = 130 + 10 = 140 \quad \text{mm Hg.}$$

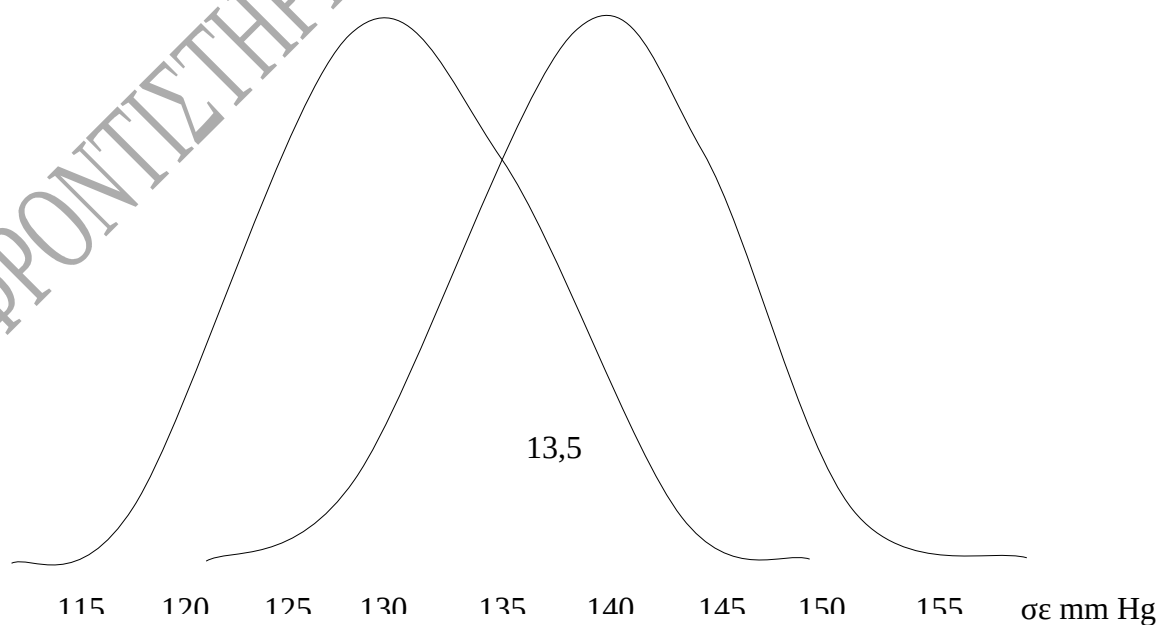
$$\text{Ενώ } s_B = s_A = 5 \text{ mm Hg.}$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{y}_B} = \frac{5}{140} < \frac{5}{130} = CV_A$$

Οπότε , έτσι το δείγμα Β παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια σε σχέση με το δείγμα Α.



β)



$$\bar{x}_A \quad \bar{x}_A + s_A \quad \bar{x}_A + 2s_A$$

i) Από την υπόθεση έχουμε ότι το πλήθος των ατόμων του δείγματος A, στο διάστημα $\bar{x}_A + s_A, \bar{x}_A + 2s_A$, είναι ίσο με 540, όμως το παραπάνω διάστημα περιέχει το 13,5% του πλήθους n_A των ατόμων της κατανομής A, άρα

$$\Leftrightarrow \frac{13,5}{100} n_A = 540 \Leftrightarrow 13,5 n_A = 54.000$$

$$13,5\% n_A = 540 \quad n_A = \frac{54000}{13,5} = 4000$$

Δηλαδή $n_A = 4000$, έτσι $n_A = n_B = 4.000$ άτομα.

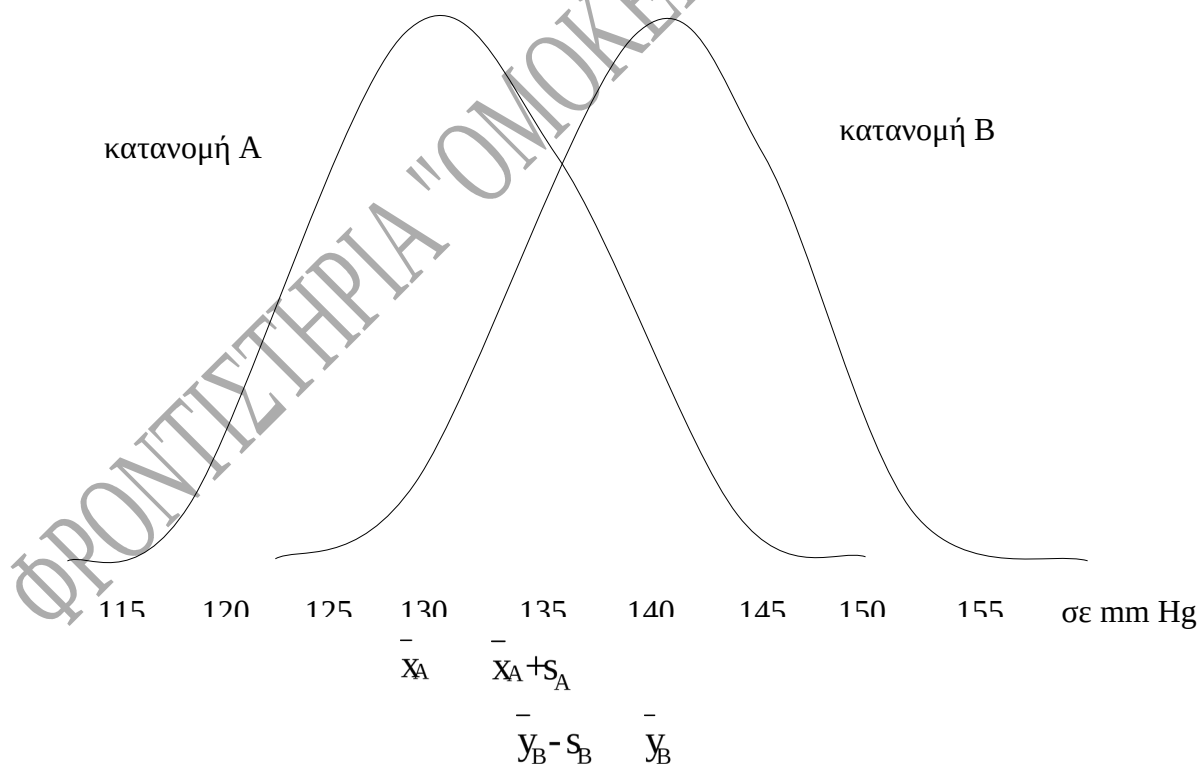
ii) Οπότε συνολικά και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135 mm Hg.

➤ Το 84% των ατόμων της κατανομής A

➤ Το 16% των ατόμων της κατανομής B

$$\frac{84}{100} 4.000 + \frac{16}{100} 4.000 = 4.000$$

Άρα συνολικά 4.000 άτομα



ΘΕΜΑ Δ

$$f'(x) = \frac{-2x}{(\alpha x^2 + 1)^2}$$

Δ1. α)

$$(ε): y = -\frac{1}{2}x + \beta \quad \text{είναι} \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{και}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ισούται με την παράγωγο της f στο $x_0=1$, επομένως είναι:

$$f'(1) = -\frac{2}{2(\alpha+1)^2} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha+1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = -1 \pm \sqrt{2}$$

, οπότε η συνάρτηση f

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{και είναι} \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

Για $x=1$ και $y = \frac{1}{2}$ στην (ε) βρίσκουμε: $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

β)

$$x \quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$$

$$f'(x) \quad + \quad -$$

$$f(x) \quad \text{τ.μ.}$$

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $f(0)=1$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο, αφού για $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq f(0)=1$ και για $x \leq 0$ είναι $f(x) \leq f(0)=1$, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq f(0)=1$.

Δ2. α) Αν A ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, οπότε πρέπει $0 \leq y \leq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{2}x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{β) Είναι} \quad y_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 1 = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} + 1 = \frac{3}{10}$$

Οπότε $\{y_1, y_2, y_3\} = \{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{10}\}$

i) Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $(A \cap B)$, $A \cup B$, και A είναι οι αριθμοί $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά.

Η αύξουσα σειρά αυτών των αριθμών είναι $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Είναι $A \subseteq A \cup B$, οπότε $P(A) \leq P(A \cup B)$.

Αν $P(A) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι $P((A \cap B)') = \frac{3}{10}$,

αλλά τότε $1 - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{10} > P(A)$ που είναι άτοπο γιατί ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A)$, αφού $A \cap B \subseteq A$.

Αν $P(A) = \frac{3}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι $P((A \cap B)') = \frac{3}{10}$,

αλλά τότε $1 - P(A \cap B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5} > P(A)$ που είναι άτοπο γιατί ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A)$, αφού $A \cap B \subseteq A$.

Επομένως είναι: $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ και $P((A \cap B)') = \frac{4}{5}$.

Επειδή είναι $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$, τότε $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)') = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

ii) Είναι $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ (3)

Επίσης είναι $A - B' = A \cap B' = A \cap B$, οπότε $P(A - B') = P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $P(A \cap B') < P(A - B')$ και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, τότε $f(P(A \cap B')) > f(P(A - B'))$.

iii) Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Επίσης, $B \cap \Gamma \subseteq \Gamma$, άρα $P(B \cap \Gamma) \leq P(\Gamma) \Leftrightarrow P(B \cap \Gamma) \leq \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$- P(B \cap \Gamma) \geq -\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) - P(B \cap \Gamma) \geq -\frac{3}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B - \Gamma) \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B - \Gamma) \geq \frac{2}{10} \Leftrightarrow P(B - \Gamma) \geq \frac{1}{5} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{5} \leq P(B-\Gamma) \leq \frac{1}{2}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ