

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 3 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ -
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. i) Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

ii) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι $z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z)$.

Μονάδες 2

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$.

Μονάδες 2

γ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f: A \rightarrow A$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση g , τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $A \cap B$.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$, όπου f' , g' είναι συνεχές στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ και $z \neq 0$.

B1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους

$$\operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\operatorname{Re}(z)$$

οποίους ισχύει είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 5

B3. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του παραπάνω γεωμετρικού τόπου με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ να δείξετε ότι $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

Μονάδες 5

B4. Αν z_3, z_4, z_5 είναι μιγαδικοί του παραπάνω γεωμετρικού τόπου να δείξετε ότι $|z_3 + z_4 + z_5| = |z_3 z_4 + z_4 z_5 + z_5 z_3|$.

Μονάδες 5

B5. Έστω οι μιγαδικοί w για τους οποίους ισχύει $(w - 2 + 2i)^{2015} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Να βρείτε τον Γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να δείξετε ότι $2\sqrt{2} - 2 \leq |z - w| \leq 2\sqrt{2} + 2$ όπου z είναι μιγαδικός του γεωμετρικού τόπου του ερωτήματος B1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \kappa x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ είναι η $y = (1 - \kappa)x$.

Μονάδες 5

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 5

ii) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $E(\kappa)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x=\kappa$, $\kappa>1$.

i) Να αποδείξετε ότι $E(\kappa) = e^{\kappa} - \frac{\kappa^2}{2} - \kappa - 1$.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε το $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} E(\kappa)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $g(x) = \int_0^1 t f(x \cdot t) dt$, $t, x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $g(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

Δ3. $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\int_0^2 t f(t) dt = 3 \int_0^1 t f(t) dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$: $2g(\xi) = f(\xi)$.

Μονάδες 7

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ "ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ" ΦΛΩΡΟΠΟΛΕΩΣ