

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 8

A2. i) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ .

Μονάδες 4

ii) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρήσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο $x = x_0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

γ. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο $x = x_0$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι "1-1" τότε ισχύει: $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in \Delta$.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x = x_0$ τότε και η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + ax + 2}{x - 1}$, $x > 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

Αν $a=0$

B2. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f της εφαπτομένης (ϵ) και την $x=3$.

Μονάδες 7

B5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e)=1$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

• $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

• $\frac{f^2(x)}{x} = 0$

• $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2016} = e$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες 7

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$ κινείται στην γραφική παράστασης της f και η τετμημένη να αυξάνεται, καθώς απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό $4a$ cm/sec.

Αν η εφαπτομένη της C_f στο M τέμνει τον x' στο σημείο A , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του A την χρονική στιγμή όπου $a(t_0)=e$.

Μονάδες 6

$$h(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 1$$

Γ4. Θεωρούμε

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της h του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=2$, $x=e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $F(x)$ μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 2xf(x)$$

$$F(x) - x \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0)=1$ και $f(x)=e^{x^2}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι $e^{x^2} \geq x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ3. α) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $g(x) \geq h(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, επίσης υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$:

$g(x_0) > h(x_0)$, να δείξετε ότι: $\int_a^b g(x) dx > \int_a^b h(x) dx$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{4 - 3 \int_1^x f(x) dx}{x-2} - \frac{f(x)}{x-1} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο

$(1, 2)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $G(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ και $G(1)=0$ να υπολογιστεί το

ολοκλήρωμα: $\int_0^1 G(x) dx$.

Μονάδες 5

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ