

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου.

A2. i. Λ, ii. Σ, iii. Σ, iv. Λ, v. Λ

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A4. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(x)=3x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$.

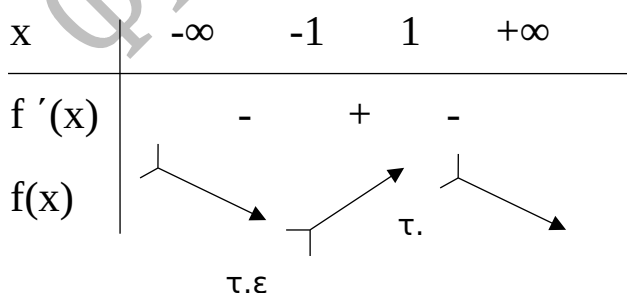
ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\bullet f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

$$\bullet f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Άρα



$H f$ $\downarrow$ στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$
 $H f$ $\uparrow$ στο $[-1, 1]$

Στο $x = -1$ η f παρ. τ. ελάχιστο στο $f(-1) = \frac{-1}{2}$ και τ. μέγιστο στο $x=1$ στο $f(1) = \frac{1}{2}$.

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{3}$

Άρα

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	○	+
$f(x)$					
		Σ	Σ	Σ	

Τα ΣΚ είναι $A\left(\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $O(0, 0)$, $B\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

B3. Για $x \rightarrow -\infty$ ($y = \lambda x + \beta$)

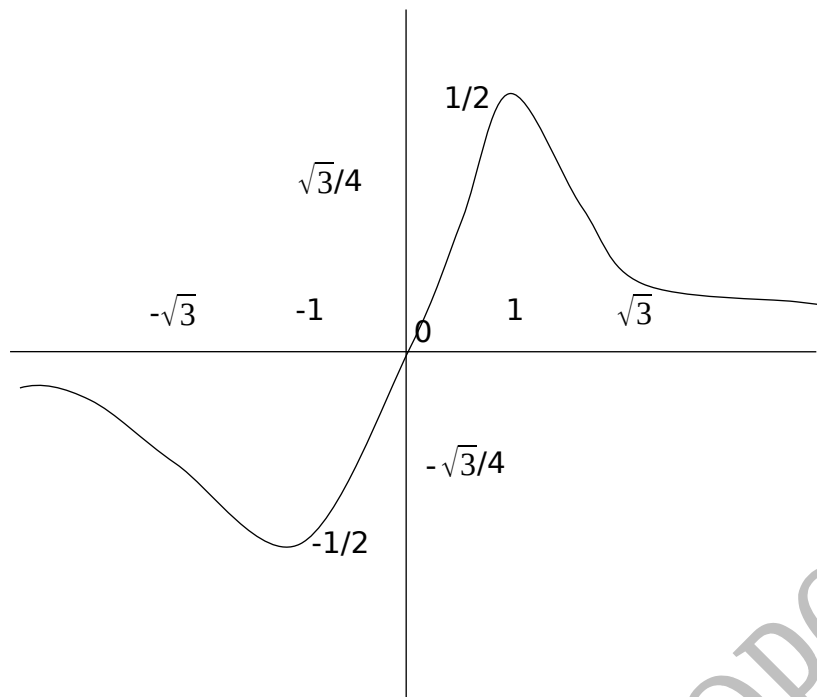
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} x}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{x^2} = 0 = \lambda$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{x} = 0 = \beta$

Οπότε $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Όμοια και στο $+\infty$.

B4.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	-	+	+	○	-
$f''(x)$	-	○	+	○	-	○	+
$f(x)$	0	ΣΚ	ΣΚ	M	ΣΚ	0	



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \rightarrow 0$ θέτουμε $\frac{f(x)+x^2}{x}=g(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=2$

Οπότε $f(x)=x \cdot g(x)-x^2$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot g(x)-x^2)=0 \cdot 2-0=f(0)$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f'(0)=\frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot g(x)-x^2-0}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} (g(x)-x)=2-0=2$$

Γ2. $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$$y-0=2x \Rightarrow y=2x$$

Γ3. $g(0)=0$ και $g'(x)=2$ συνx άρα $g'(x)=2$ οπότε $y-0=2(x-0)$ άρα $y=2x$ είναι και εφαπτομένη της C_g στο $x=0$.

Γ4. Για $x \rightarrow 0$ είναι $\left| f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right| = |f(x)| \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |f(x)|$

$$\text{Οπότε } -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0} [-|f(x)|] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$$

$$\text{Από Κ.Π. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{1}{x} \right) = 0$$

Γ5. Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την $h(x) = (x-1)[(f(x))^{2018} + 2] + xf(x)^{2017}$ στο $[0, 1]$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Για } x > 0: xf'(x) = -f(x) \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$(xf(x))' = (\ln x)' \Rightarrow$$

$$xf(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=1: f(1) = \ln 1 + c \Rightarrow c=0$$

$$\text{Οπότε } f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$$

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \text{οπότε}$$

$y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \frac{1}{x} \right) = \begin{matrix} (-\infty) \\ (-\infty) \end{matrix}$$

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Για } x > 0: f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

$$A_1 = (0, e], f \uparrow \text{ τότε } f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e)] = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

$$A_2 = [e, +\infty) f \downarrow \text{ τότε } f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), f(e)] = (0, \frac{1}{e}]$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

$$\Delta 3. \text{ Αρκεί } 2f(4x) + f(x) > 2f(3x) + f(3x) \Rightarrow$$

$$2(f(4x) - f(3x)) > f(3x) - f(x)$$

$$\frac{f(4x) - f(3x)}{x} > \frac{f(3x) - f(x)}{2x}$$

Η f είναι συνεχής στο $[x, 3x]$ και $[3x, 4x]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 3x)$, $(3x, 4x)$

Από ΘΜΤ υπάρχουν

$$\xi_1 \in (x, 3x): f'(\xi_1) = \frac{f(3x) - f(x)}{3x - x} = \frac{f(3x) - f(x)}{2x}$$

$$\xi_2 \in (3x, 4x): f'(\xi_2) = \frac{f(4x) - f(3x)}{4x - 3x} = \frac{f(4x) - f(3x)}{x}$$

$$\text{Επειδή } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow[\text{στο } [e\sqrt{e}, +\infty)]{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(3x) - f(x)}{2x} < \frac{f(4x) - f(3x)}{x} \text{ ή}$$

$$\frac{f(4x) - f(3x)}{x} > \frac{f(3x) - f(x)}{2x}$$

$$\Delta 4. \text{ Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση}$$

$$h(x) = x \Leftrightarrow \alpha^x = x \Leftrightarrow x \ln \alpha = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln \alpha \Leftrightarrow f(x) = \ln x, \alpha > 0$$

$$f(A_1) = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

$$f(A_2) = (0, \frac{1}{e}]$$

$$1) \text{ Αν } \ln \alpha > \frac{1}{e} \Rightarrow \alpha > e^{\frac{1}{e}} \text{ τότε } f(x) = \ln \alpha \text{ είναι αδύνατη.}$$

$$2) \text{ Αν } \ln \alpha = \frac{1}{e} \Rightarrow \alpha = e^{\frac{1}{e}} \text{ τότε } f(x) = \ln \alpha \text{ έχει μοναδική λύση } x = e.$$

3) Αν $0 < \ln \alpha < 1 \Rightarrow 1 < \alpha < e^{\frac{1}{e}}$ τότε η $f(x) = \ln \alpha$ έχει δύο ρίζες μια στο A_1 και μια στο A_2 .

4) Αν $\ln \alpha < 0$

$$\ln \alpha < \ln 1$$

$\alpha < 1$ τότε $f(x) = \ln \alpha$ έχει μια λύση στο A_1 .

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ