

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το Θ. Rolle του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Έστω ο ισχυρισμός «Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x_0)=0$ τότε η f στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

- i. Απαντήστε με (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστός ή λάθος.

Μονάδα 1

- ii. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A3. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε δείξτε ότι και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

- i. Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- iii. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία η διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- iv. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- v. Αν η f συνεχής στο Δ και γν. αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x)) = e^{x-2} + x - 2$ και $g(x) = x - 1$.

B1. Δείξτε ότι $f(x)=e^{x-1}+x-1$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

B4.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in (0, 1)$.

Μονάδες 5

ii. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\ln x - g(x)}{f(x)}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ και το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση $g(x)=1-\ln x$, $x > 0$.

Γ1. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση ενός σημείου $M(x, y)$, $y=f(x)$ της C_f από το σημείο A .

Μονάδες 6

Γ2. Αν $d(x)=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$, $x \geq 0$ είναι ο τύπος της απόστασης (AM) να βρείτε την τιμή του x ώστε η απόσταση να γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 7

Γ3. Ένα κινητό N ξεκινά από το σημείο $O(0, 0)$ και κινείται στην C_f . Σε ποιο σημείο της C_f ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του N είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του N αν $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 6

Γ4.

i. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$.

Μονάδες 3

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x) - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x \cdot \ln(x+\alpha)+1$, $\alpha>0$ και $x \in (-\alpha, +\infty)$. Επίσης για κάθε $x \in (-\alpha, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq 1$.

Δ1. Δείξτε ότι $\alpha=1$

Για $\alpha=1$.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι f είναι γν. φθίνουσα στο $(-1, 0]=\Delta_1$ και γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)=\Delta_2$.
Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ3. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^x=e$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 \in \Delta_1$ και $x_2 \in \Delta_2$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$: $f'(x_0)+f(x_0)=2$.

Μονάδες 5

Δ4. Δείξτε ότι $f(x)+f(x+1)<f(x-1)+f(x+2)$ για κάθε $x>-1$.

Μονάδες 7

Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ