

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

- A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

- A3.** Δίνεται ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = a$ τότε $a=1$.

1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση ισχύει:
2.

A5.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=1-e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να προσδιορίσετε την $f \circ g$.

$$\text{Αν } h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(1 - e^x), x < 0$$

- B2.** Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1}=h$.

- B3.** Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

- B4.** Δείξτε ότι η Ch και η ευθεία $y=x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: R \rightarrow R$ μια συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) = -2xf(x), x \in R.$$

Δίνεται και η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{x^2}, x \in R$.

Γ1. Δείξτε ότι η g είναι σταθερή στο R και να βρείτε τον τύπο της f .

$$\text{Αν } f(x) = e^{-x^2}, x \in R$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Γ3. Να δείξετε ότι η Cf έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf .

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x(f(x)-1)}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\bullet (x-1)f'(1) \geq \ln x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$\bullet x f'(x) = x-1 \text{ για κάθε } x > 0$$

Δ1. Δείξτε ότι $f(x) = x - \ln x, x > 0$.

Δ2.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(f(x)-1/3) = 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f\left(f(x) - \frac{1}{3}\right) = 1$ τότε δείξτε ότι

υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της Cf στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

να διέρχεται από το σημείο $M(0, \frac{4}{3})$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) + f^2(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

