

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 15 ΜΑΪΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Δίνεται ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = a$ τότε $a=1$.

1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ισχύει:

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

4. Η συνάρτηση $f(x)=x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=1-e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$.

Μονάδες 6

$$\text{Αν } h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(1 - e^x), x < 0$$

B2. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1}=h$.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

B4. Δείξτε ότι η Ch και η ευθεία $y=x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,0)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: R \rightarrow R$ μια συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) = -2xf(x), x \in R.$$

Δίνεται και η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{x^2}, x \in R$.

Γ1. Δείξτε ότι η g είναι σταθερή στο R και να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

$$\text{Αν } f(x) = e^{-x^2}, x \in R$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η Cf έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της Cf .

Μονάδες 6

$$\text{Γ4. Να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x(f(x)-1)}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι

- $(x-1)f'(1) \geq \ln x$ για κάθε $x > 0$ και

- $\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x-1}{x}$

Δ1. Δείξτε ότι $f(x) = x - \ln x, x > 0$.

Μονάδες 5

Δ2.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 1/3) = 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Μονάδες 8

Δ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f\left(f(x) - \frac{1}{3}\right) = 1$ τότε δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό

$\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο

$M(0, \frac{4}{3})$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) + f^2(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιό σας και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ