

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού σελίδα 216.

A2. Θεωρία σχολικού σελίδα 128.

A3. Θεωρία σχολικού σελίδα 104.

A4. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

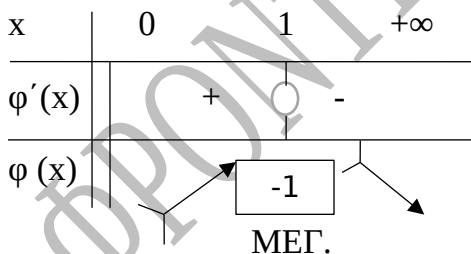
$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = \ln x - e^{\ln x} = \ln x - x$$

B2. Για κάθε $x > 0$:

$$\varphi'(x) = (\ln x - x)' = \frac{1-x}{x}$$

$$\text{Έστω } \varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$



Η φ είναι γν. αύξουσα στο $(0, 1]$, γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει για $x=1$ μέγιστο με τιμή $\varphi(1) = -1$.

B3. Για κάθε $x > 0$:

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Άρα η φ  στο $(0, +\infty)$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)'}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty$$

B4. $A_1 = (0, 1]$ οπότε $\varphi(A_1) = (-\infty, -1]$

$A_2 = (1, +\infty)$ οπότε $\varphi(A_2) = (-\infty, -1)$

Άρα $\varphi(A) = (-\infty, -1]$

Έχουμε:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{2002}{x} + 1 \Leftrightarrow \ln x = 2002 + x \Leftrightarrow \ln x - x = 2002 \Leftrightarrow g(x) = 2002$$

Επειδή $2002 \notin \varphi(A)$ η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - \lambda$.

Έστω $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln \lambda$.

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			
	ΕΛΑΧ.		

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει για $x=\ln\lambda$ ελάχιστο με τιμή $f(\ln\lambda)=\lambda \cdot (1-\ln\lambda)$

Γ2. Θεωρούμε $g(\lambda)=\lambda(1-\ln\lambda)$, $\lambda>0$.

Για $\lambda>0$: $g'(\lambda)=-\ln\lambda$.

Έστω $g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$

λ	0	1	$+\infty$
$g'(\lambda)$		+	-
$g(\lambda)$			

ΜΕΓ.

Η g παρουσιάζει μέγιστο για $\lambda=1$ με τιμή $g(1)=1$

Γ3. $e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Αφού $f(x) \geq 0$ θα ισχύει: $\lambda(1-\ln\lambda) \geq 0 \stackrel{\lambda>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ θα είναι η $\lambda=e$.

Γ4. Η ευθεία $y=e \cdot x$ για να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της C_g αρκεί να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} g(x_0) = e \cdot x_0 \\ g'(x_0) = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} = e \cdot x_0 \\ e^{x_0} = e \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(1+u)]'}{(u)'} \stackrel{DLH}{=} \dot{=}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+u} = 0 = a$$

Δ2. i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty$$

οπότε δεν ορίζεται $f'(0)$.

ii) Θεωρούμε: $g(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$

Η g συνεχής στο $[x, x+1]$ ως λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $g'(t) = \frac{1}{t}$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1): g'(f) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow g'(\xi) = g(x+1) - g(x)$$

$$g''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$$

Άρα η g  στο $(0, +\infty)$

$$\text{Επειδή } \xi < x+1 \underset{\text{concave}}{f'} \searrow g'(\xi) > g'(x+1) \Leftrightarrow g(x+1) - g(x) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{x+1}$$

iii) Για κάθε $x > 0$:

$$f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \dots \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

Άρα η f  στο $[0, +\infty)$, οπότε η f είναι "1-1" και αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} \underset{(DLH)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{0}{0} \right)}{(u)'} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+u} = 1$$

$$A_{f^{-1}} = f(A) = (0, 1).$$

Δ3. i)

$$f(2+\eta\mu x) = f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right) f : \text{"1-1"} \quad 2+\eta\mu x = 2+\frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - \frac{x-1}{x+1} = 0$$

Θεωρούμε

$$h(x) = \eta\mu x - \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in [1, +\infty)$$

$$h(1) = \eta\mu 1 > 0 \quad \left. \vphantom{h(1)} \right\} h(1) \cdot h(\pi) < 0$$

$$h(\pi) = -\frac{\pi-1}{\pi+1} < 0 \quad \left. \vphantom{h(\pi)} \right\}$$

Από θ. Β η $h(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (1, \pi)$

$$h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{5\pi}{2} - \frac{\frac{5\pi}{2}-1}{\frac{5\pi}{2}+2} = \frac{2}{\frac{5\pi}{2}+1} > 0$$

$$h(\pi) \cdot h\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$$

Από θ. Β η $h(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

ii)

$$\text{Για } x > 1 : h'(x) = \dots \sigma\upsilon\nu x - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_1) = h'(x_2) = 0. \text{ Από θ. Rolle υπάρχει } x_0 \in (x_1, x_2) : h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$$

Δ4. Για $x > 0$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x \cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(x) > \frac{x+1-1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) > 1 - \frac{1}{x+1}$$

Τότε:

$$\int_1^3 f(x) dx > \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx > [x - \ln|x+1|]_1^3 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2$$