

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 9

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμικού (Θ.Μ.Τ.).

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - e^x$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x$.

B1. Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $\varphi(x)=(f \circ g)(x)=\ln x - x$, $x > 0$.

Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να δείξετε ότι η φ είναι κοίλη και να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Μονάδες 7

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln x}{x} = \frac{2022}{x} + 1$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x - \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Δ1. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $f(\ln \lambda) = \lambda(1 - \ln \lambda)$, $\lambda > 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $\lambda = 1$.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του λ ($\lambda > 0$) για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η $\lambda = e$.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = e$ να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0 \\ a, & x = 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 4

Για $a=0$

Δ2. i) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii) Δείξτε ότι $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Μονάδες 3x3=9

Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση $f(2+\eta\mu x)=f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.

i) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (1, \pi)$ και μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$

Μονάδες 2x4=8

Δ4. Δείξτε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2$$

Μονάδες 4