

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , όταν $x \rightarrow +\infty$.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε ισχύει πάντα $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x-e^x$ και $g:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x)=\ln x$.

B1. Να βρείτε την συνάρτηση fog .

Μονάδες 5

B2. Αν $\varphi(x)=(f \circ g)(x)=\ln x - x$, $x > 0$.

Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να δείξετε ότι η φ είναι κοίλη, να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και να την σχεδιάσετε.

Μονάδες 7

B4. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln x}{x} = \frac{2023}{x} + 1$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x - \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Γ1. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $f(\ln \lambda) = \lambda(1 - \ln \lambda)$, $\lambda > 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $\lambda = 1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του λ ($\lambda > 0$) για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η $\lambda = e$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda = e$

i) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη της C_g του ερωτήματος (i) και την ευθεία $x = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0 \\ a, & x = 0, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Μονάδες 4

Για $a = 0$

Δ2. i) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii) Δείξτε ότι $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{x+1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Μονάδες 3x3=9

Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση $f(2+\eta\mu x)=f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.

i) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (1, \pi)$ και μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\sin x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$

Μονάδες 2x4=8

Δ4. Δείξτε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2$$

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ