

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΜΑΪΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:A \rightarrow B$ ισχύει:

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Η συνάρτηση $f(x)=x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x, \quad x > 0$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = \varphi \circ g$.

Μονάδες 4

♦ Αν $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $0 < x \neq 1$, τότε

B2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B3. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 8

B4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ και το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση $g(x) = 1 - \ln x$, $x > 0$.

Γ1. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση ενός σημείου $M(x, y)$, $y = f(x)$ της C_f από το σημείο A .

Μονάδες 6

Γ2. Αν $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}$, $x \geq 0$ είναι ο τύπος της απόστασης (AM) να βρείτε την τιμή του x ώστε η απόσταση να γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 7

Γ3. Ένα κινητό N ξεκινά από το σημείο $O(0, 0)$ και κινείται στην C_f . Σε ποιο σημείο της C_f ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του N είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του N αν $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 6

Γ4.

i. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$.

Μονάδες 3

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x) - 1}{x - 1}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - x^2$ και η σχέση: $2f(\beta) \ln x \leq x - 1$ η οποία ισχύει για κάθε $x > 0$.

Δ1. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 4

(ii) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $M(\alpha, 0)$ με $\alpha \in (-1, 0)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \quad \mu\epsilon \quad \alpha < \beta < 0.$$

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)(f(x) - 1)^2$ έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$1 = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ