

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελίδα 135

A2. Θεωρία σχολικό σελίδα 104

A3. Θεωρία σχολικό σελίδα 128

A4. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = (x \in 10, +\infty) \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$$(\log)(x) = f(g(x)) = \ln x - e^{\ln x} = \ln x - x$$

B2.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad x > 0$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$			
$\varphi(x)$			

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει για $x=1$ μέγιστο με τιμή $\varphi(1) = \ln 1 - 1 = -1$.

B3.

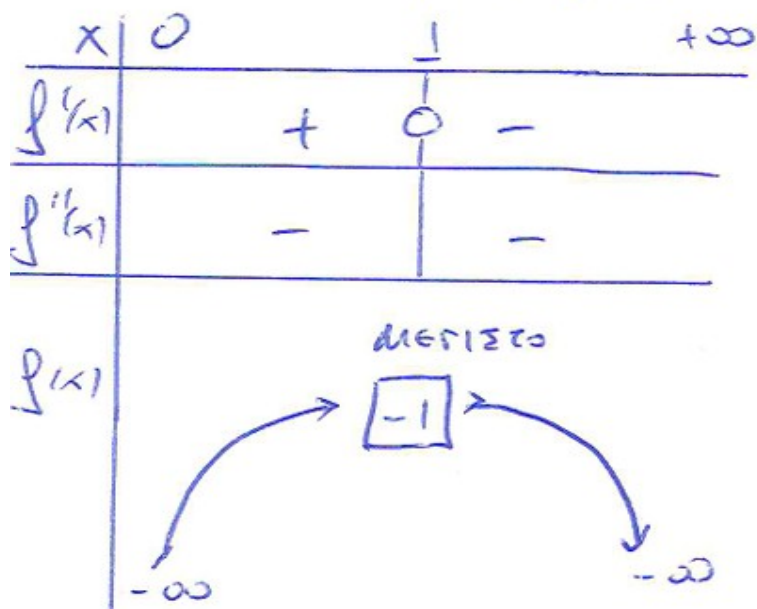
$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad x > 0$$

οπότε η φ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$

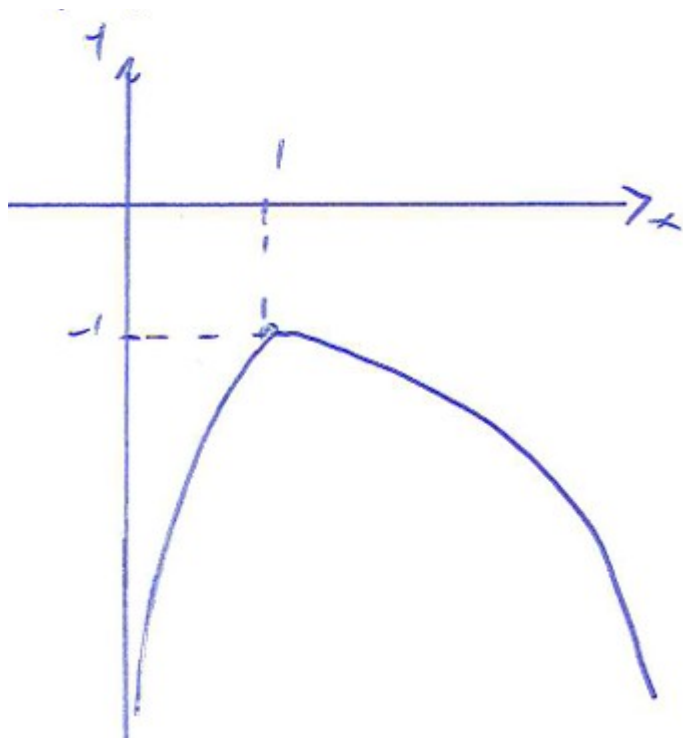
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty$$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_φ .

Πίνακας μεταβολών



Γραφική παράσταση



B4. i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty$$

$$A_1 = (0, 1], \varphi(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-\infty, -1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty (-1) = -\infty$$

$$A_2 = (1 + \infty), \varphi(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \right) = (-\infty, -1)$$

$$\varphi(A) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) = (-\infty, -1].$$

$$ii) \frac{\ln x}{x} = \frac{2026}{x} + 1 \Leftrightarrow \ln x = 2026 + x \Leftrightarrow \ln x - x = 2026 \Leftrightarrow \varphi(x) = 2026, \quad x > 0$$

$2026 \notin \varphi(A)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = e^x - \lambda$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \lambda \Leftrightarrow x = \ln \lambda$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln \lambda$$

x	$-\infty$	$\ln x$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Η f παρουσιάζει για $x = \ln \lambda$ ελάχιστο με τιμή $f(\ln \lambda) = e^{\ln \lambda} - \lambda \cdot \ln \lambda = \lambda(1 - \ln \lambda)$

Γ2. Θεωρούμε $h(\lambda) = \lambda(1 - \ln \lambda)$, $\lambda > 0$

$$h'(\lambda) = 1 - \ln \lambda + \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = -\ln \lambda$$

$$h'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$h'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+		-
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η h παρουσιάζει για $\lambda = 1$ μέγιστο με τιμή $h(1) = 1$.

Γ3.

$$e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ οπότε } f_{\min} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \ln \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq e$$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι e .

Γ4. i) Η $y = ex$ για να εφάπτεται της C_y στο $(x_0, g(x_0))$ αρκεί:

$$\begin{cases} g(x_0) = e x_0 \\ g'(x_0) = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} = e x_0 \\ e^{x_0} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = e \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

οπότε εφάπτονται στο $(1, e)$

ii) $g''(x)=e^x>0$ οπότε η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x) \geq ex$.

$$E = \int_0^1 (g(x) - ex) dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e-2}{2} \text{ τ. μονάδες.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x} = u}{\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u}} = \frac{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+u}}{(DLH)} = 0 = f(0) = \alpha \text{ ζ}$$

$$\Delta 2. i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii) Θεωρούμε $g(t)=\ln t, t \in [x, x+1]$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$:

$$g'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \text{ ή } g'(\xi) = f(x+1) - f(x)$$

$$g''(x) = -\frac{1}{t^2} < 0 \text{ άρα η } g' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [x, x+1] \text{ οπότε:}$$

$$\xi < x+1 \Leftrightarrow g'(\xi) > g'(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

$$iii) f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0, \quad x > 0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και "1-1" οπότε αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x} = u}{\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u}} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+u}}{(DLH)} = 1 \text{ ζ}$$

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [0, 1)$$

$$\Delta 3. i) f\left(2 + \frac{x-1}{x+1}\right) = f\left(\frac{2(x+1) + x-1}{x+1}\right) = f\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = 2 + \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \eta \mu x - \frac{x-1}{x+1} = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } h(x) = \eta \mu x - \frac{x-1}{x+1}$$

Η h είναι συνεχής στο $[1, \pi]$ ως πράξεις Σ.Σ

$$h(1) = \eta \mu 1 > 0, \quad h(\pi) = -\frac{\pi-1}{\pi+1} < 0, \quad h(1)h(\pi) < 0$$

Από Θ.Β. υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_1 \in (1, \pi)$ $h(x_1)=0$

Η h είναι συνεχής στο $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ ως πράξεις $\Sigma.\Sigma.$

$$h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{4}{5\pi+2} > 0, \quad h(\pi)h\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$$

Από Θ.Β υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right): h(x_2)=0$

ii) $[x_1, x_2]$. Από Θ. Rolle υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2): h'(x_0)=0 \Rightarrow$

$$\sigma \circ \nu x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$$

$$\Delta 4. \text{ Από } \Delta 2. \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \iff x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(x) > 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Τότε } \int_1^3 f(x) dx > \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2.$$